THESES

PRESENTEES

A L'UNIVERSITE PARIS VI

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR-INGENIEUR

PAR

PIERRE-MARIE STREMSDOERFER

SOUTENUES LE 9 JUIN 1972 DEVANT LA COMMISSION D'EXAMEN :

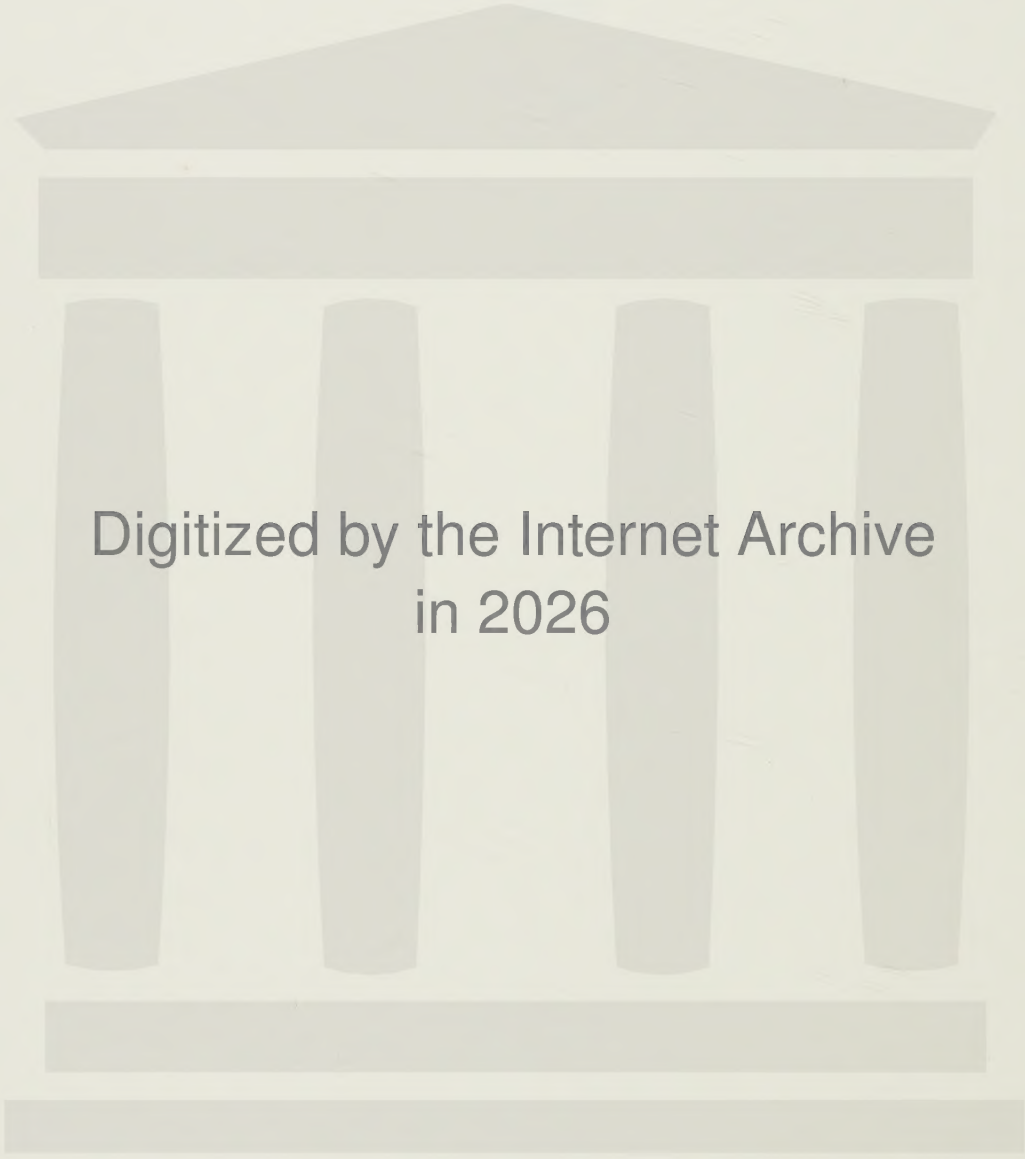
MM.	GERMAIN	PRESIDENT
	SIESTRUNCK	)
	MANDEL	» EXAMINATEURS
	TINCELIN	)

PREMIERE THESE

RESOLUTION PAR LA METHODE DES ELEMENTS FINIS
DES PROBLEMES VISCOELASTIQUES ET ELASTOPLASTIQUES
POSES PAR LES CAVITES SOUTERRAINES .

DEUXIEME THESE (Propositions données par la Faculté)

INFLUENCE DE LA CIRCULATION DES EAUX SUR
L'ETAT DE CONTRAINTE DES MASSIFS ROCHEUX .


Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41548010_0025

THESES

PRESENTEES

A L'UNIVERSITE PARIS VI

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR-INGENIEUR

PAR

PIERRE-MARIE STREMSDOERFER

SOUTENUES LE 9 JUIN 1972 DEVANT LA COMMISSION D'EXAMEN :

MM. GERMAIN — PRESIDENT

SIESTRUNCK, MANDEL, TINCELIN — EXAMINATEURS

PREMIERE THESE

RESOLUTION PAR LA METHODE DES ELEMENTS FINIS
DES PROBLEMES VISCOELASTIQUES ET ELASTOPLASTIQUES
POSES PAR LES CAVITES SOUTERRAINES .

DEUXIEME THESE (Propositions données par la Faculté)

INFLUENCE DE LA CIRCULATION DES EAUX SUR
L'ETAT DE CONTRAINTE DES MASSIFS ROCHEUX .

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

Au seuil de cet exposé , je tiens à adresser de chaleureux remerciements à toutes les personnes qui m'ont apporté leur aide :

Que MM. GERMAIN , SIESTRUNCK , MANDEL et TINCELIN qui ont bien voulu m'accorder une partie de leur temps précieux , trouvent ici l'expression de ma respectueuse reconnaissance .

Je remercierai , en la personne de M. ROUX et de M. POTTIER , GAZ DE FRANCE qui a apporté son concours financier et scientifique à cette étude .

Enfin , je suis tout particulièrement reconnaissant envers mes collègues et amis du CENTRE D'ETUDES DE MECANIQUE DES ROCHES de l'ECOLE DES MINES DE PARIS pour leur aide efficace et pour la qualité du climat d'amitié que chacun a contribué à tisser . Jacques et Bernadette FINE , Philippe WEBER , Franc de GRENIER , Emmanuel LEDOUX et surtout Gérard VOUILLE , dont les conseils m'ont été précieux lors de la rédaction de cette thèse ,et dont je n'ai jamais pu prendre en défaut la disponibilité et la patience , à tous je vous dois un grand merci .

SOMMAIRE

-:-:-:-

INTRODUCTION

CHAPITRE I - RAPPEL DE LA METHODE DES ELEMENTS FINIS

I - La méthode des éléments finis

II - La méthode des déplacements en élasticité

CHAPITRE II - RESOLUTION DES PROBLEMES VISCOELASTIQUES LINEAIRES

I - Choix du schéma rhéologique
a) représentation spectrale de la matrice de retard
b) représentation approchée des solides viscoélastiques linéaires

II- Schéma rhéologique et équations de comportement

III- Méthode numérique de résolution
a) formulation de la méthode des éléments finis
b) élimination des variables cachées
c) algorithme de calcul

IV - Test de la méthode applications
a) test de la méthode et du programme
1- déformation différée à pression constante
2- relaxation
b) intérêt de la méthode

V - Ajustement des paramètres

VI - Conclusion.

CHAPITRE III - RESOLUTION DES PROBLEMES ELASTOPLASTIQUES

I- La loi de comportement
a) hypothèses préliminaires
b) le critère de plasticité
c) le potentiel plastique
d) matrice d'élastoplasticité
e) critères pris en compte par le programme
f) potentiels plastiques pris en compte

II- L'algorithme de résolution
a) procédés itératifs utilisables
b) algorithme employé par PLASTAX
c) comparaison de modes de convergence

III- Comparaison des résultats du programme PLASTAX avec des solutions analytiques
a) test de la limite élastique pour des répartitions très simples de contrainte
b) éprouvette cylindrique en traction simple avec écrouissage
c) éprouvette frettée au-delà de la limite d'élasticité
d) cavité cylindrique de révolution en milieu élastoplastique

IV- Possibilités actuelles de PLASTAX

CHAPITRE IV - ETUDE DES CAVITES DE STOCKAGE DE GAZ EN COUCHE DE SEL

I - Présentation du problème
  a) nécessité et rôle du stockage
  b) problème du stockage pour la région lyonnaise
  c) réalisation des cavités de stockage en couche de sel
  d) mode d'exploitation des cavités de stockage de gaz
  e) problèmes mécaniques posés par les cavités de Tersanne

II - Etude de la cavité n° 1 de GAZ DE FRANCE à Tersanne
  a) schéma rhéologique adopté
  b) maillage employé
  c) étape de calcul
  d) résultats

III - Conclusion

CONCLUSION GENERALE

ANNEXE 1

ANNEXE 2

BIBLIOGRAPHIE

NOTATIONS GENERALES

Les Matrices sont notées entre crochets : $[A]$

La transposition est notée : $[A]^t$

Nous utilisons un vecteur déformation et un vecteur contrainte notés respectivement $\{\varepsilon\}$ et $\{\sigma\}$ et dont les six composantes sont :

$$\varepsilon_1 = \varepsilon xx \qquad \varepsilon_2 = \varepsilon yy \qquad \varepsilon_3 = \varepsilon zz$$

$$\varepsilon_4 = 2\varepsilon xy \qquad \varepsilon_5 = 2\varepsilon yz \qquad \varepsilon_6 = 2\varepsilon zx$$

$$\sigma_1 = \sigma xx \qquad \sigma_2 = \sigma yy \qquad \sigma_3 = \sigma zz$$

$$\sigma_4 = \tau xy \qquad \sigma_5 = \tau yz \qquad \sigma_6 = \tau zx$$

Etant donnée une fonction scalaire $P(\{\sigma\})$, le vecteur de composantes $\frac{\partial P}{\partial \sigma_i}$ est noté

$$\left\{ \frac{\partial P}{\partial \{\sigma\}} \right\}$$

Dans la formulation de la méthode des éléments finis, les vecteurs force, déplacement et la matrice de raideur sont notés en lettres minuscules lorsqu'ils sont relatifs à un élément donné, et en lettres majuscules lorsqu'ils sont relatifs au système global.

Les autres notations seront définies au cours du texte.

INTRODUCTION

La réalisation d'excavations souterraines et d'ouvrages souterrains de plus en plus audacieux, nécessite une prévision de plus en plus précise du comportement des massifs rocheux, non seulement au moment du creusement, mais aussi pendant de nombreuses années, après creusement.

Une telle étude prévisionnelle comporte schématiquement deux parties :

- Il faut tout d'abord déterminer les paramêtres inhérents au massif, à savoir :
  - les paramêtres structuraux tirés de reconnaissances géologiques et de sondages.
  - le comportement des matériaux rocheux étudié sur éprouvettes en laboratoire. Les facteurs essentiels intervenant dans la déformation du matériau rocheux sont les contraintes, le temps, la température, et la présence éventuelle d'un liquide intersticiel.(MORLIER [17]).
  - les contraintes et les déformabilités in situ (TALOBRE [7] K.G. STAGG [8]).

- Il faut ensuite déterminer la perturbation apportée au champ de contrainte, et les déplacements que provoquera dans le massif l'ouvrage envisagé. La connaissance des champs de contraintes et de déplacements permet alors de savoir si l'ouvrage présente des garanties suffisantes de sécurité; et s'il est bien susceptible de rendre les services pour lequel il est conçu.

On peut être ainsi amené à faire des retouches au projet initial pour aboutir à une solution techniquement (et économiquement) satisfaisante. L'analyse des champs de contraintes et de déplacements peut se faire par deux méthodes différentes :

- Les études expérimentales sur modèles réduits [8] [9] (photoélasticité, études sur maquettes).
- Les études numériques sur modèles mathématiques.

Ces dernières reposent sur une schématisation de la réalité à trois niveaux différents :

- le comportement du matériau rocheux est approché par l' intermédiaire de schémas rhéologiques plus ou moins complexes.
- la nature fissurée du milieu rocheux n'est en général pas prise en compte ; celui-ci est considéré comme continu.
- la géométrie du problème est parfois simplifiée.

La méthode de calcul par éléments finis en élasticité qui permet de prendre en compte les formes géométriques les plus complexes, s'est avérée un outil particulièrement efficace pour l'analyse des contraintes et des déplacements.

Depuis plusieurs années, Le Centre de Mécanique des Roches, de l'Ecole des Mines de Paris, a développé l'utilisation de cette méthode, principalement dans le domaine des exploitations minières.

Il existe cependant de nombreux cas où la rhéologie des roches et les chargements auxquels elles sont soumises font qu'il est impossible de négliger les phénomènes de déformations différées et de relaxation dus à la viscosité, ou les déformations permanentes dues à la plasticité.

L'étude que nous avons entreprise au Centre de Mécanique des Roches, avait précisément comme objet la mise au point de méthodes de calcul par éléments finis et de programmes pour la résolution des problèmes viscoélastiques et élastoplastiques, et leur application au problème des cavités souterraines.

En ce qui concerne la viscoélasticité :

- une étude théorique à partir de considérations thermodynamiques de Biot [10] et Mandel [11], nous a permis de définir une famille de schémas rhéologiques permettant de représenter n'importe quel matériau viscoélastique linéaire, avec la précision que l'on veut.
- nous avons écrit et testé un programme traitant les problèmes de contraintes ou de déformations planes. La méthode de résolution s'inspire d'un algorithme du à Zienkiewicz. [13]

  Nous avons cependant employé un schéma rhéologique un peu plus général.
- Nous avons mis au point une méthode pratique et systématique permettant de trouver un schéma rhéologique, représentant le matériau avec la précision voulue.

Pour l'élastoplasticité :

- nous avons écrit un programme traitant les problèmes élastoplastiques, (contraintes ou déformations planes, problèmes de révolution) avec ou sans écrouissage pour des matériaux standards ou non (le potentiel plastique peut être différent du critère de plasticité). La méthode de résolution est une extension de la méthode dite "de la contrainte initiale", ([14], [15]), au cas des matériaux non standards.
- nous avons mené les études en élastoplasticité dans le cadre d'un contrat entre GAZ DE FRANCE et le Centre de Mécanique des Roches.
- après comparaison des résultats numériques et analytiques pour un certain nombre de problèmes, nous avons appliqué la méthode et le programme au cas des cavités de stockage en couche de sel de GAZ DE FRANCE à Tersanne, qui illustre la finesse avec laquelle un problème élastoplastique complexe peut être analysé.

Les schémas viscoélastiques et élastoplastiques ne sont, certes, qu'une étape vers une représentation plus réaliste de la rhéologie des roches ; en particulier, ces schémas ne permettent pas de rendre compte des cas où la viscosité et la plasticité interviennent conjointement.

Nous pensons cependant que les outils mathématiques mis au point à l'occasion de cette étude, et que nous nous sommes efforcés de rendre le plus possible performants et pratiques d'emploi, sont susceptibles de rendre d'utiles services en Mécanique des Roches, et aussi, d'une manière plus générale, dans de nombreux domaines relevant de la mécanique des milieux continus.

CHAPITRE I

RAPPELS SUR LA METHODE DES ELEMENTS FINIS.

Avant de passer au cas de la viscoélasticité et de l'élastoplasticité, nous définissons la méthode des éléments finis en général, et donnons sa formulation dans le cas de la mécanique des milieux continus en élasticité.

Il existe de nombreux ouvrages sur la question (références [1] à [6]) Nous nous contenterons donc dans cette partie, de rappeler les principaux résultats sans prétendre redémontrer leur validité.

I - LA METHODE DES ELEMENTS FINIS.

La méthode des éléments finis est une méthode variationnelle approchée, dérivée de la Méthode de Rayleigh-Ritz.

Soit une fonctionnelle $F\left[u\right]$ définie sur un domaine D par :

$$F\left[u\right] = \int_D f\left(s, u, \frac{\partial u}{\partial s}, \ldots\right) ds.$$

où u est un champ de fonctions inconnu, et f une fonction connue de S, de u et des dérivées de u .

Sachant qu'il existe un champ $u_o(S)$ et un seul, pour lequel F est stationnaire, (principe variationnel), le problème consiste à déterminer ce champ $u_o(S)$.

La méthode des éléments finis revient à décomposer le milieu continu en éléments ; chaque élément est étudié en faisant une hypothèse sur le champ des fonctions inconnues, (approximation polynomiale), de sorte que pour déterminer le champ de fonctions, il suffit de connaître les valeurs de celles-ci en un certain nombre de points caractéristiques de l'élément appelés noeuds.

Les éléments sont ensuite assemblés suivant une loi déduite du principe variationnel. On aboutit alors à la résolution d'un système linéaire.

La méthode des éléments finis revient donc à approcher la solution réelle d'un problème continu par celle d'un problème possédant un nombre élevé, mais fini, de degrés de liberté.

II - LA METHODE DES ELEMENTS FINIS POUR LA MECANIQUE DES MILIEUX CONTINUS EN ELASTICITE.

(METHODE DES DEPLACEMENTS).

On veut déterminer les champs de déplacement et de contrainte en tout point d'un milieu continu, connaissant la géométrie du milieu, les charges et les déplacements imposés.

On dispose en mécanique de trois principes variationnels : énergie potentielle minimum, énergie complémentaire minimum, principe de Reissner.

La méthode des déplacements est relative au théorème de l'énergie potentielle :

" De tous les champs de déplacements cinématiquement admissibles, c'est le champ réel qui rend minimum l'énergie potentielle".

Le problème consiste à trouver le champ de déplacement réel.

Pour simplifier l'exposé, nous nous plaçons dans le cas d'un problème à deux dimensions, (contraintes ou déformations planes, ou problème de révolution), et nous découpons le milieu en éléments finis triangulaires, les noeuds étant les sommets I J K de chaque triangle. Nous choisissons comme type de fonction de déplacement dans chaque élément, une fonction linéaire des coordonnées, ce qui assure la continuité des déplacements à la frontière entre deux éléments voisins :

$$u(x,y) = A_o + A_1 x + A_2 y$$
$$v(x,y) = B_o + B_1 x + B_2 y \qquad (1.1.)$$

Si l'on écrit que ces relations sont vérifiées aux trois sommets I,J,K, nous obtenons un système d'équations linéaires :

$$\{u\} = [M]\{A\}$$

avec : $\{u\}^t = (u_I, u_J, u_K, v_I, v_J, v_K)$

$$\{A\}^t = (A_o, A_1, A_2, B_o, B_1, B_2)$$

$[M]$ étant une matrice régulière 6 X 6 fonction des coordonnées des sommets de l'élément.

Les relations (1.1.) permettent d'écrire par dérivation :

$$\{\varepsilon\} = [\Delta]\{A\}$$

En posant $[B] = [\Delta][M]^{-1}$, nous pouvons exprimer les déformations à l'intérieur de chaque élément, en fonction des déplacements des points nodaux de l'élément par :

$$\{\varepsilon\} = [B]\{U\} \qquad (1.2.)$$

où $[B]$ est une matrice fonction des coordonnées des noeuds de l'élément.

Pour un élément donné, soumis à un champ de contrainte $\{\sigma\}$, on cherche les forces qu'il faudrait appliquer aux noeuds I,J,K, pour que l'élément, considéré isolément, soit en équilibre.

Le théorème des travaux virtuels donne :

$$\{f\} = \iiint_{vol} [B]^t \{\sigma\} \, d(vol) \qquad (1.3.)$$

où $\{f\}$ est un vecteur formé de toutes les composantes des forces appliquées aux noeuds de l'élément.

Une remarque importante pour la suite est que (1.2.), et (1.3.) ont été établies sans qu'aucune hypothèse soit faite sur la relation contraintes-déformations.

Si nous supposons le milieu élastique, nous avons en outre :

$$\{\sigma\} = [T] \{\varepsilon\}$$

où $[T]$ est la matrice des coefficients d'élasticité.

Nous pouvons alors écrire :

$$\{f\} = [k] \{u\}$$

avec :
$$[k] = \iiint_{vol} [B]^t [T] [B] \, d(vol) \qquad (1.4.)$$

$[k]$ est appelé matrice de raideur élémentaire.

Nous remarquons qu'avec le type d'élément fini employé, $\{\varepsilon\}$ et $\{\sigma\}$ sont constants dans chaque élément.

Notations :

Nous noterons avec des lettres minuscules, les vecteurs force, déplacement, et la matrice de raideur de chaque élément.

En faisant la somme de toutes les forces appliquées à chaque noeud, on obtient une relation linéaire entre les déplacements de tous les noeuds et les forces F qui y sont appliquées :

$$\{F\} = [K] \{U\} \qquad (1.5.)$$

La matrice $[K]$ est appelée matrice de raideur globale. Cette matrice est symétrique, et a une structure bande qui se prête bien au calcul sur machines.

Notations :

Nous noterons avec des majuscules les vecteurs forces, déplacements et la matrice de raideur du système global.

Le système (1.5.) permet alors de calculer $\{U\}$ connaissant $\{F\}$. Ayant calculé $\{U\}$, on peut alors calculer dans chaque élément les contraintes par :

$$\{\sigma\} = [T] [B] \{u\} \qquad (1.6.)$$

CHAPITRE II

RESOLUTION DES PROBLEMES VISCOELASTIQUES LINEAIRES.

La méthode numérique présentée permet de calculer à tout instant les contraintes et les déformations de solides viscoélastiques linéaires, de forme quelconque, dans le cas des petites déformations et des petits déplacements, avec un chargement pouvant varier au cours du temps, et avec des caractéristiques mécaniques pouvant dépendre du temps, ou de la température. Elle s'inspire d'un algorithme du à Zienkiewicz [13].

On utilise ici un schéma rhéologique plus général qui permet de représenter n'importe quel matériau viscoélastique linéaire.

Après l'exposé des considérations théoriques qui ont déterminé le choix du schéma rhéologique, nous préciserons la méthode de résolution employée, et proposerons une méthode pratique d'ajustement des paramètres.

I - CHOIX DU SCHEMA RHEOLOGIQUE.

a) Représentation spectrale de la matrice de retard.

Considérons un solide viscoélastique linéaire soumis à un chargement Q_i $i = 1..n$, les déplacements associés observables étant q_i $i = 1..n$. Nous supposons que le solide est resté au repos jusqu'à l'instant $t = 0$, et que les propriétés du matériau ne varient pas au cours du temps. Les chargements et les déplacements sont en correspondance fonctionnelle :

$$q(t) = F\left[Q(\tau)\right]_0^t \quad \text{où F est une fonctionnelle linéaire.}$$

Soit : $(f_{ij}(t))$ la matrice de retard, définie par :

$$f_{ij}(t) = F_i\left[Yj(\tau)\right]_0^t$$

où Yj est le chargement dont la composante j est la fonction d'Heaviside et dont les autres composantes sont nulles.

Les déplacements sont alors donnés par :

$$q_i(t) = \frac{d}{dt}\int_0^t f_{ij}(u)\ Q_j(t-u)\,du.$$

Soit : $\overset{*}{f}_{ij}(P)$ la transformée de Carson de $f_{ij}(t)$

$$\overset{*}{f}_{ij}(P) = P\int_0^\infty e^{-pt} f_{ij}(t)\,dt$$

Deux approches différentes ont été utilisées pour étudier la forme de la matrice compliance opérationnelle, (f^*_{ij}) :

a) une approche plutôt "mécanique" que l'on peut trouver, entre autres, chez DR.BLAND [12], qui part de l'hypothèse que les matériaux viscoélastiques linéaires sont mécaniquement équivalents à un réseau d'éléments "visqueux" (des amortisseurs), et d'éléments "élastiques", (des ressorts).

b) une approche s'appuyant sur le deuxième principe de la thermodynamique (BIOT) [10].

Dans les deux cas, la conclusion est que f_{ij} peut s'écrire :

$$f^*_{ij}(P) = \sum_r J^{(r)}_{ij} \frac{\lambda_r}{p + \lambda_r} + J^o_{ij} \qquad i,j \in \{1 \dots n\}$$

$$f_{ij}(t) = \sum_r J^{(r)}_{ij} \left(1 - e^{-\lambda_r t}\right) + J^o_{ij}$$

Avec les propriétés suivantes :

.P1 la matrice $f_{ij}(t)$ est symétrique et associée à une forme quadratique définie positive.

.P2 les matrices $J^{(r)}_{ij}$ sont des matrices symétriques associées à des formes quadratiques non négatives, de même pour J^o_{ij} (propriété signalée par Mandel [11]).

.P3 les pôles de $f^*_{ij}(P)$ sont strictement négatifs :

$$\lambda_r > 0 \quad \forall r$$

Remarque 1 :

Nous avons quatre cas possibles :

1) Le spectre de retard est composé d'un nombre fini de λ_r. $f_{ij}(t)$ est alors égal à la somme d'un nombre fini de termes.

2) Le spectre de retard est un spectre de raies composé d'une infinité de λ_r.

3) Le spectre de retard est continu.

4) Le spectre de retard est continu sur certaines parties du domaine de variation $[0,+\infty]$ de λ et du type spectre de raies sur les autres parties du domaine.

Nous utiliserons une formulation qui englobe tous ces cas :

$$\overset{*}{f}_{ij}(p) = J^{o}_{ij} + \int_{o}^{+\infty} \varphi_{ij}(\lambda) \frac{\lambda}{p+\lambda} d\lambda$$

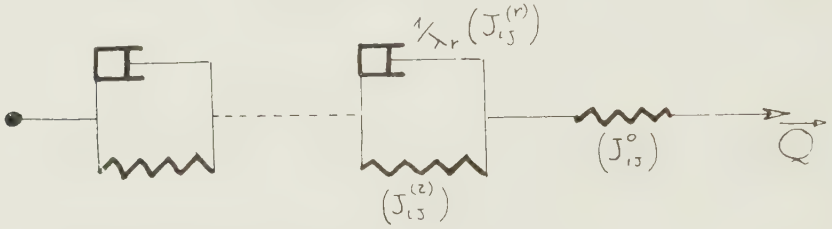
$$f_{ij}(t) = J^{o}_{ij} + \int_{o}^{+\infty} \varphi_{ij}(\lambda) (1 - e^{-\lambda t}) d\lambda \qquad (2.1.)$$

où les φ_{ij} sont des distributions telles que :

$$\varphi_{ij} = \varphi_{ji} \quad \text{et} \quad \forall \vec{x} \neq \vec{o} \quad \varphi_{ij} x_i x_j \geq o$$

REMARQUE 2

Le terme J^{o}_{ij} peut-être interprété très simplement comme la contribution d'un "ressort" et les termes $J^{(r)}_{ij}(1 - e^{-\lambda_r t})$ comme la contribution des modèles de Kelvin Voigt, le tout étant en série :



Par conséquent :

Tout corps viscoélastique linéaire peut être représenté par le groupement en série d'un ressort (pour l'élasticité instantanée)et d'une série de modèles de Kelvin Voigt. Cette série peut comprendre un nombre fini de modèles de Kelvin Voigt ou une infinité (discrète ou continue).

b) Représentation approchée des solides viscoélastiques linéaires.

Nous appellerons schéma M-fini, un schéma rhéologique formé du groupement en série d'un "ressort", et d'un nombre fini de "modèles de Kelvin-Voigt". Nous avons remarqué, qu'à partir des propriétés P1,P2, et P3, on peut déduire une propriété de convergence uniforme locale, que l'on peut résumer ainsi :

Pour tout solide viscoélastique linéaire, dont les caractéristiques ne dépendent pas du temps, quel que soit le seuil d'erreur ε choisi, et quel que soit l'intervalle de temps $[0,B]$, il existe un schéma M-fini dont les caractéristiques ne dépendent pas du temps, tel que la borne supérieure (quand le temps varie de o à B), de l'erreur $|D|$ faite en substituant le schéma au solide viscoélastique initial soit inférieure au seuil ε fixé :

$$\forall B, \forall \varepsilon > 0 \qquad \exists \text{ M-fini}, \sup_{t \in [0,B]} |D| \leq \varepsilon \qquad (2.2.)$$

On est ainsi assuré de pouvoir, à bon droit, substituer au solide viscoélastique le plus général un schéma M-fini.

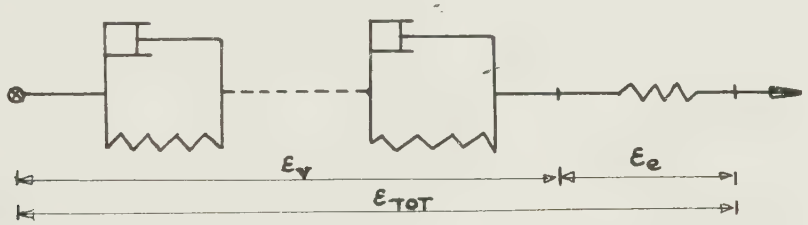
On trouvera la démonstration complète de cette propriété en annexe. (Annexe A1).

Cette propriété, dont, à notre connaissance, la démonstration n'avait pas été jusque là explicitée, est importante pour les applications au calcul numérique :

S'il est en effet impossible d'avoir une méthode numérique générale permettant de traiter n'importe quel solide viscoélastique sous des chargements quelconques variables au cours du temps, on peut par contre traiter facilement à l'ordinateur les schémas M-finis, et ceci avec un même programme.

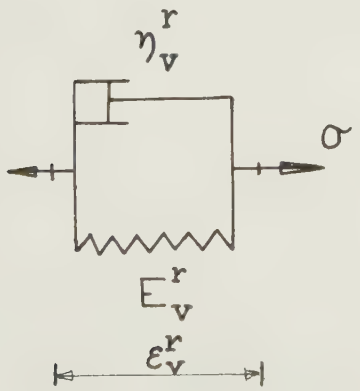
II - SCHEMA RHEOLOGIQUE ET EQUATIONS DE COMPORTEMENT.

Nous choisissons donc un schéma rhéologique formé d'un "ressort", pour l'élasticité instantanée, et d'un nombre fini de modèles de Kelvin Voigt :



Les déformations et les déplacements relatifs à l'élasticité instantanée seront affectés de l'indice e . Les déformations et déplacements différés, relatifs aux modèles de Kelvin seront affectés de l'indice v .

Les équations de comportement de chaque modèle de Kelvin sont :



pour un schéma monodimensionnel :

$$\sigma = \frac{b_r}{a_r}\ \varepsilon_v^r + \frac{1}{a_r}\ \dot{\varepsilon}_v^r$$

en posant : $a_r = \dfrac{1}{\eta_v^r}$

$$b_r = \frac{E_v^r}{\eta_v^r}$$

$$\dot{\varepsilon}_v^r = \frac{d\,\varepsilon_v^r}{dt}$$

Pour un schéma tridimensionnel :

$$\{\sigma\} = \left[T_v\right]_r \left(\frac{b_r}{a_r}\ \{\varepsilon_v^r\} + \frac{1}{a_r}\ \{\dot{\varepsilon}_v^r\} \right)$$

où $[T_v]_r$ est une matrice 6 X 6, relative au modèle de Kelvin numéro r, symétrique définie positive, analogue à la matrice des coefficients d'élasticité. Le nombre de coefficients indépendants est fonction du degré d'anisotropie.

Nous pouvons exprimer $\{\dot{\varepsilon}_v^r\}$ en fonction de $\{\sigma\}$ et de $\{\varepsilon_v^r\}$

$$\{\dot{\varepsilon}_v^r\} = (a_r [T_v]_r^{-1} \{\sigma\} - b_r \{\varepsilon_v^r\}) \qquad (2.3)$$

En notation matricielle, et si $[T]$ est la matrice des coefficients de l'élasticité instantanée, les équations de comportement du schéma rhéologique global peuvent s'écrire :

$$(2.4) \qquad \{\dot{\varepsilon}_v\} = \sum_{r=1}^{n} \{\dot{\varepsilon}_v^r\} = \sum_{r=1}^{n} \left(a_r [T_v]_r^{-1} \{\sigma\} - b_r \{\varepsilon_v^r\}\right)$$

$$(2.5) \qquad \{\varepsilon_{tot}\} = \{\varepsilon_e\} + \{\varepsilon_v\}$$

$$(2.6) \qquad \{\sigma\} = [T]\{\varepsilon_e\}$$

III - METHODE NUMERIQUE DE RESOLUTION.

On procède par incréments de temps pendant lesquels on prend pour les paramêtres qui varient au cours du temps (forces extérieures, contraintes, caractéristiques des matériaux...) des valeurs constantes égales aux valeurs que prennent réellement ces paramêtres en début d'incrément.

L'équation (2.3.) peut alors s'intégrer :

$$(2.7) \qquad \{\varepsilon_v^r(t)\} = \{\varepsilon_v^r(t-\Delta t)\} e^{-b_r \Delta t} + \frac{a_r}{b_r} [T_v]^{-1} \{\sigma(t-\Delta t)\}(1-e^{-b_r \Delta t})$$

Les incréments de temps seront pris d'autant plus petits que les paramêtres varient plus rapidement au cours du temps.

- On résoud le système formé des équations (2.5.), (2.6.), (2.7.) par la méthode des éléments finis en éliminant les déformations et déplacements élastiques instantanés et différés qui sont des "variables cachées", et en faisant apparaître les déformations et déplacements totaux qui seuls sont observables à chaque instant.

a) Formulation de la méthode des éléments finis.

Nous nous plaçons dans le cas des problèmes à deux dimensions. Le milieu est découpé en éléments finis triangulaires, les noeuds étant les sommets I,J,K, de chaque triangle.

Dans chaque élément, nous choisissons comme fonctions de déplacement élastique instantané et différé, deux fonctions linéaires des coordonnées.

D'après (1.2.), nous avons alors les relations :

$$(2.8) \qquad \{\varepsilon_e\} = [B]\{u_e\} \qquad \{\varepsilon_v\} = [B]\{u_v\}$$

où $\{u_e\}$ et $\{u_v\}$ sont respectivement les déplacements élastiques instantanés et différés des points nodaux de l'élément.

D'autre part, l'application du théorème des travaux virtuels,(1.3.) et les relations (2.6.) et (2.8), permettent d'écrire pour chaque élément :

$$\{f\} = [k]\{u_e\} \qquad (2.9)$$

où $[k]$ est la matrice de raideur élémentaire calculée avec les coefficients de l'élasticité instantanée : (1.4.)

$$[k] = \iiint_{vol} [B]^t [T] [B] \; d(vol)$$

En faisant la somme de toutes les forces appliquées à chaque noeud, on obtient le système :

$$\{F\} = [K]\{U_e\} \qquad (2.10)$$

ou $\{F\}$ est un vecteur dont les composantes sont toutes les composantes de toutes les forces extérieures appliquées en tous les noeuds du maillage.

b) Elimination des variables cachées :

D'après (2.5) et (2.8), nous avons :

$$\{u_{tot}\} = \{u_e\} + \{u_v\} \text{ et } \{U_{tot}\} = \{U_e\} + \{U_v\}$$

Nous pouvons donc écrire d'après (2.10) :

$$\{F(t)\} = [K]\{U_e(t)\} = [K]\{U_{tot}(t)\} - [K]\{U_v(t)\}$$

posons :

$$\{f_v(t)\} = [k]\{u_v(t)\} \qquad (2.11)$$

En faisant la somme des forces $\{f_v\}$ appliquées aux mêmes noeuds, nous obtenons :

$$\{F_v(t)\} = [K]\{U_v(t)\}$$

nous pouvons alors écrire :

$$\{F(t)\} + \{F_v(t)\} = [K]\{U_{tot}(t)\} \qquad (2.12)$$

D'après (2.11), et (2.8), nous avons :

$$\{f_v(t)\} = \iiint_{vol} [B]^t [T]\{\varepsilon_v(t)\} \; d(vol)$$

posons :

$$\{\sigma_v^r(t)\} = [T]\{\varepsilon_v^r(t)\} \qquad (2.13)$$

nous obtenons :

$$\{f_v(t)\} = \iiint_{vol} [B]^t \sum_{r=1}^{n} \{\sigma_v^r(t)\} \; d(vol) \qquad (2.14)$$

Calcul de $\{\sigma(t)\}$:

$$\{\sigma(t)\} = [T]\{\varepsilon_e\} = [T]\{\varepsilon_{tot}(t)\} - [T]\{\varepsilon_v(t)\}$$

Nous avons donc :

$$\{\sigma(t)\} = [T][B]\ \{U_{tot}(t)\} - \sum_{r=1}^{n} \{\sigma_v^r(t)\} \qquad (2.15)$$

Nous avons alors éliminé les variables cachées au profit des déplacements totaux $\{u_{tot}\}$, mais ce faisant, nous avons fait apparaître des variables $\{\sigma_v^r\}$ homogènes à des contraintes. Ces variables se calculent à l'aide des expressions (2.7.) et (2.13).

c) Algorithme de calcul :

Regroupons les expressions auxquelles nous sommes arrivés :

$$\{\sigma_v^r(t)\} = \{\sigma_v^r(t-\Delta t)\}\ e^{-b_r \Delta t} + \frac{a_r}{b_r}\ [T][T_v]_r^{-1} \{\sigma(t-\Delta t)\}\ (1-e^{-b_r \Delta t}) \qquad (2.16)$$

$$\{f_v(t)\} = \iiint_{vol} [B]^t \sum_{r=1}^{n} \{\sigma_v^r(t)\}\ d(vol) \ . \qquad (2.14)$$

$$\{F(t)\} + \{F_v(t)\} = [K]\ \{U_{tot}(t)\} \qquad (2.12)$$

$$\{\sigma(t)\} = [T][B]\{U_{tot}(t)\} - \sum_{r=1}^{n} \{\sigma_v^r(t)\} \qquad (2.15)$$

Supposons connu l'état du système à l'instant $t-\Delta t$, et en particulier $\{\sigma(t-\Delta t)\}$ et les $\{\sigma_v^r\ (t-\Delta t)\}$

(2.16) permet de calculer les n $\{\sigma_v^r\ (t)\}$ pour chaque élément.
(2.14) permet alors de calculer $\{f_v(t)\}$ pour chaque élément, et donc, $\{F_v\ (t)\}$ par sommation des forces $\{f_v\}$ s'appliquant aux mêmes noeuds.
(2.12) permet alors, connaissant le chargement imposé $\{F(t)\}$, de calculer les déplacements de tous les noeuds $\{U_{tot}(t)\}$
(2.15) permet enfin de calculer $\{\sigma(t)\}$ pour chaque élément.

A la fin de ce cycle, nous connaissons donc les déplacements à l'instant t en tous les noeuds, les $\{\sigma(t)\}$ et les $\{\sigma_v^r\ (t)\}$ pour chaque élément fini. Nous pouvons donc recommencer le processus de calcul pour connaître l'état du système à l'instant $t+\Delta t$. Le problème est donc d'initialiser le processus. Nous donnons deux exemples d'initialisation fréquemment rencontrés :

1) le solide est initialement au repos depuis un temps très long sous charge nulle, et chargé à partir de l'instant t=0. On a évidemment comme initialisation :
$\{\sigma_v^r(-\Delta t)\} = 0 = \{\sigma(-\Delta t)\}$

2) le solide est soumis depuis très longtemps à un état de contrainte constant $\{\sigma\}$ et perturbé à partir de l'instant t=0.(modification de la charge,des caractéristiques mécaniques ...etc.) Dans ce cas, avant l'instant t=0 les vitesses de déformations élastiques différées sont nulles. D'après l'équation (2.4) on voit qu'il suffit alors d'initialiser le processus avec :

$$\{\sigma(-\Delta t)\} = \{\sigma\} \qquad \{\sigma_v^r(-\Delta t)\} = \frac{a_r}{b_r}\ [T][T_v]_r^{-1}\ \{\sigma\}$$

Remarque :

Dans le cas où les caractéristiques mécaniques ne varient pas au cours du temps, on voit (équation 2.12) qu'à chaque pas de temps on résoud le même système linéaire où seul le second membre $\{F(t)\}+\{F_v(t)\}$ change. Nous tirons parti de ce point dans la résolution :

Grâce à la taille mémoire et à la précision disponibles sur l'ordinateur (CDC 6600) sur lequel nous effectuons les calculs, nous pouvons employer même pour de très gros problèmes (1600 équations à 1600 inconnues), une méthode de résolution directe par éliminations successives (méthode de Gauss). En stockant les pivots, on n'effectue qu'une fois la triangularisation de la matrice de raideur globale $[K]$ La résolution est alors très rapide.

IV - TEST DE LA METHODE. APPLICATIONS.

a) Test de la méthode et du programme.

Pour ce test, nous avons traité le cas de l'éprouvette isotrope et homogène en compression simple (déformations planes) et comparé les résultats avec les solutions analytiques. Le maillage très lâche, n'avait que 50 noeuds.(fig.1 et 2);

Nous avons pris comme caractéristiques :
pour l'élasticité instantanée :
$E = 50\,000$ bars $\qquad \nu = 0,25$

pour l'élasticité différée (un modèle de Kelvin)
$\nu' = 0,25 \qquad a = 0,2 \times 10^{-4}$ bar$^{-1} \qquad b = 1.\text{jour}^{-1}$

1) Déformation différée à pression constante

On exerce à t = 0 une pression uniforme de 100 bars maintenue constante par la suite. On a trouvé, conformément aux théorèmes généraux de la viscoélasticité des contraintes constamment égales à 100 bars. Les contraintes et les caractéristiques mécaniques ne changeant pas au cours du temps, la méthode de résolution nous a donné rigoureusement la solution exacte (fig.1) :

$$V = 10 \left| \frac{1-\nu^2}{E}\sigma + \frac{a}{b}(1-\nu^2)\sigma(1-e^{bt}) \right|$$

où V est le déplacement vertical de la face supérieure de l'éprouvette.

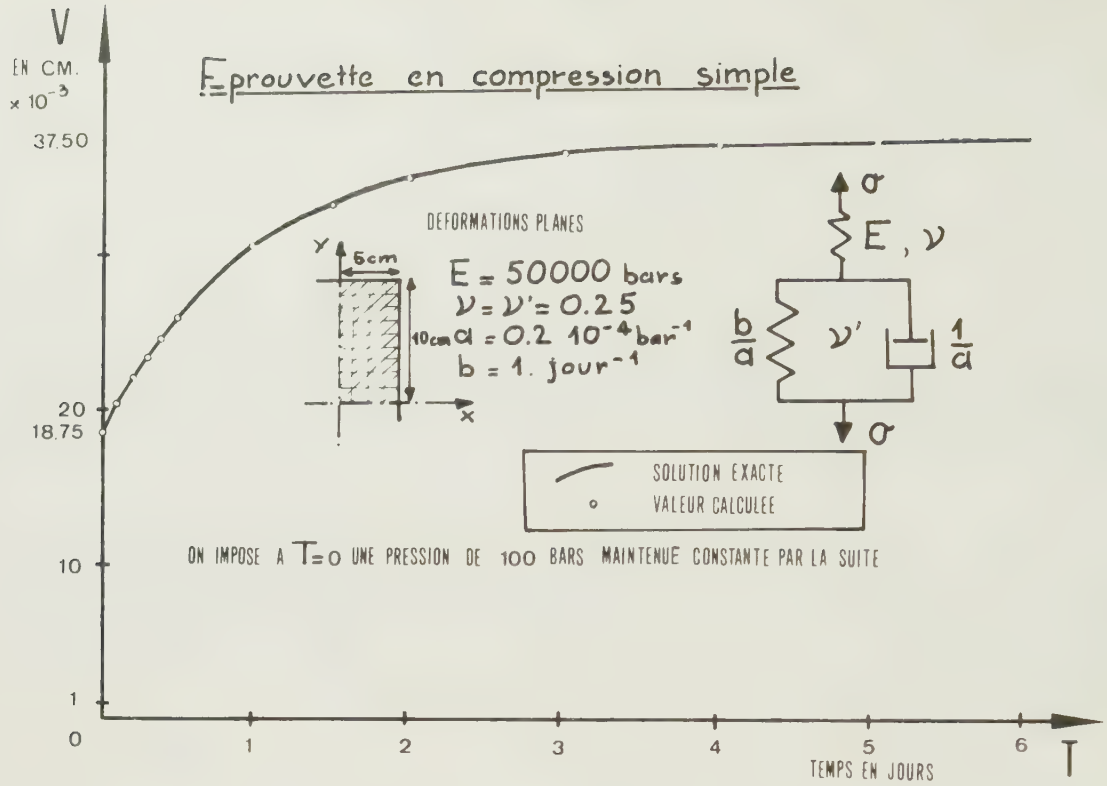


Figure 1

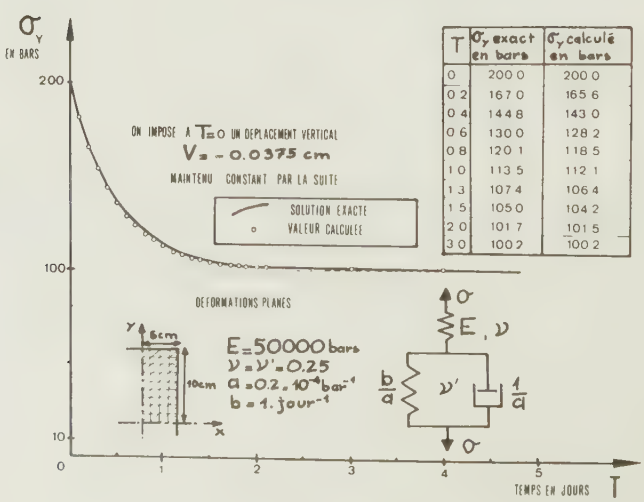
Dans un tel cas on aurait pu procéder en un seul intervalle de temps pour connaître le système à l'instant t.

2) Relaxation de la contrainte longitudinale σ_y en fonction du temps.

On impose à t=0 un déplacement vertical Δ=0.03750 cm maintenu constant par la suite. Comme nous avons pris $\nu = \nu'$, nous avons trouvé, comme prévu des déplacements constamment égaux aux déplacements initiaux. Nous avons comparé les résultats obtenus pour σ_Y avec ce que donne la fonction de relaxation calculée par les transformées de Carson (fig.2) :

$$\sigma_Y \frac{E}{(Ea+b)(1-\nu^2)} (b\,H(t) + Ea\, e^{-(Ea+b)t})$$

Où H (t) est la fonction d'Heaviside.



T	σ_y exact en bars	σ_y calculé en bars
0	200 0	200 0
0 2	167 0	165 6
0 4	144 8	143 0
0 6	130 0	128 2
0 8	120 1	118 5
1 0	113 5	112 1
1 3	107 4	106 4
1 5	105 0	104 2
2 0	101 7	101 5
3 0	100 2	100 2

Figure 2

b) Intérêt de la méthode.Applications.

De nombreux matériaux présentent un comportement viscoélastique important : certaines roches (marnes ...), certains bétons, de nombreux polymères, les lithergols (fusées à poudres)etc...

Les domaines où les phénomènes viscoélastiques interviennent sont donc très variés.

L'intérêt de la méthode présentée est qu'elle permet de connaître l'évolution au cours du temps des contraintes et des déformations pour des solides de forme quelconque, mais relativement massive formés de différents matériaux viscoélastiques (certains pouvant être purement élastiques).

Dans le domaine des travaux souterrains, la méthode est susceptible de s'appliquer aux problèmes suivants :

- étude des déformations différées de cavités sans soutènement ni revêtement.

- calcul du soutènement minier ou du revêtement des tunnels en milieu viscoélastique.

- étude de l'influence de l'ancrage par boulons sur la diminution des déformations différées des cavités souterraines.

Remarque

Dans de nombreux cas, on ne s'intéresse qu'à l' état "asymptotique" du milieu. Le seul cas où l'on puisse calculer les contraintes et les déplacements par les lois de l'élasticité en prenant comme Module d'Young, le module de déformation asymptotique mesuré dans les expériences de compression simples à charge constante est le cas où le milieu est homogène et non gèné dans ses déplacements.

Ce cas est assez rare en pratique. En fait, la chronologie des travaux peut avoir d'importantes conséquences sur le comportement à long terme du milieu :

Pour le calcul d'un revêtement de tunnel en milieu viscoélastique par exemple, le temps qui s'écoule entre le creusement du tunnel et la pose du revêtement détermine en grande partie le niveau de contrainte auquel sera soumis asymptotiquement le revêtement:en milieu viscoélastique , un revêtement posé très peu de temps après le percement subit de la part du massif des contraintes beaucoup plus fortes qu'un revêtement posé longtemps après creusement.

V - AJUSTEMENT DES PARAMETRES.

Le théorème sur les schémas M.finis énoncé en Ib, et démontré en annexe est un théorème d'existence :quel que soit le matériau viscoélastique linéaire, nous avons (2.2.) :

$$\forall B, \forall \varepsilon > 0 \ \exists \text{ M.fini} : \sup_{t \in [0,B]} |D| < \varepsilon$$

où $|D|$ est l'erreur faite en substituant au matériau réel le schéma rhéologique.

L'objet du présent chapitre est de présenter une méthode pra-

tique pour obtenir des schémas rhéologiques vérifiant la propriété (2.2.), c'est à dire aptes à représenter valablement la réalité.

1) Paramètres concernant l'élasticité instantanée.

Ces paramètres sont mesurés par la méthode habituelle, à savoir dans le cas de l'orthotropie, compression parallèle au plan de schistosité, compression perpendiculaire et compression à 45°. Il faut simplement opérer sufisamment rapidement pour que les mesures puissent être considérées comme ne prenant en compte que les déformations élastiques instantanées.

2) Paramètres concernant l'élasticité différée.

Nous nous plaçons pour simplifier, dans le cas de l'isotropie. Dans ce cas la matrice $\left[T_v \right]_r^{-1}$ se réduit à :

$$\left[T_v \right]_r^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -\nu'_r & -\nu'_r & 0 & 0 & 0 \\ -\nu'_r & 1 & -\nu'_r & 0 & 0 & 0 \\ -\nu'_r & -\nu'_r & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu'_r) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu'_r) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu'_r) \end{bmatrix}$$

Chaque "modèle" de Kelvin Voigt est alors déterminé par trois paramètres : a_r b_r et ν'_r

Le problème est de trouver une famille de tels "modèles" qui, mis en série, approche le comportement différé du matériau avec la précision que l'on désire.

a) Données expérimentales indispensables.

On a besoin des déformations longitudinales $\varepsilon_y(t)$ et transversales $\varepsilon_x(t)$ obtenues dans une expérience de compression simple où l'on applique rapidement à t=0 une pression P maintenue constante par la suite.

D'après (2.4.) (contraintes constantes), le schéma rhéologique employé donne :

$$\begin{aligned} \varepsilon_y(t) - \varepsilon_y(o) &= \varepsilon_y^v(t) = P \sum_{r=1}^{n} \frac{a_r}{b_r} (1-e^{-b_r t}) \\ \varepsilon_x(t) - \varepsilon_x(o) &= \varepsilon_x^v(t) = P \sum_{r=1}^{n} \frac{a_r}{b_r} \nu'_r (1-e^{-b_r t}) \end{aligned} \qquad (2.17)$$

Il faut donc trouver a_r b_r et ν'_r tels que les déformations différées théoriques et expérimentales coïncident avec la précision que l'on veut :

b) Méthode d'ajustement graphique.

Pour résoudre le problème d'ajustement, on pourrait penser à

des méthodes numériques de minimisation d'une norme d'erreur. On a préféré utiliser une méthode d'ajustement graphique qui s'est révélée très satisfaisante et très souple d'emploi. On avait pour cet ajustement graphique le choix entre des méthodes analogiques (analogie électriques) ou digitales (calculs à l'ordinateur). Nous avons choisi la dernière solution, car, outre sa souplesse d'emploi, elle peut prendre en compte très facilement des rhéologies plus complexes.(viscoplasticité, viscosité non linéaires...)

L'ajustement graphique est réalisé à l'aide d'un périphérique (IBM 2250) de l'ordinateur IBM 360/40, permettant de visualiser jusqu'à trois courbes à la fois sur un écran.

L'utilisateur effectue directement l'appel à ses sous programmes personnels et l'affichage des courbes désirées en écrivant les ordres convenables à l'écran.

Les opérations à effectuer sont alors les suivantes :

1) Affichage sur l'écran de la courbe expérimentale.
2) Calcul de ε_y théorique par (2.17) avec n "modèles" de Kelvin (on commence avec n=1), et donc n couples ($a_r b_r$).
3) Affichage de la courbe calculée et comparaison avec la courbe expérimentale.
4) Eventuellement : contrôle quantitatif de l'ajustement en faisant sortir les coordonnées de points choisis en les visant au crayon lumineux.

On répète plusieurs fois les opérations 2) et 3) en faisant varier a_r et b_r pour améliorer l'ajustement. Si celui-ci ne peut être amélioré suffisamment, on reprend 2) avec n+1 "modèles".

Cela peut sembler devoir être très long, en fait :
- on sait dans quel sens les paramètres font évoluer les courbes.
- on procède par encadrement de la courbe expérimentale.
- en règle générale, deux ou trois modèles de Kelvin suffisent pour avoir la précision désirée.

A titre d'exemple, le raccordement illustré par les photos (fig.3,4,5) a été obtenu avec 2 modèles de Kelvin en 40 mm, le temps de calcul en machine étant de 15 s.

Le raccordement est obtenu en tout point avec moins de 4 % d'écart.

Les coefficients ν'_r peuvent être obtenus de façon analogue à partir de la courbe expérimentale ε_x (t).

VI CONCLUSION.

La méthode d'ajustement et la méthode numérique de résolution présentées fournissent un moyen puissant pour étudier le comportement des milieux viscoélastiques linéaires. La première permet d'obtenir un schéma rhéologique représentant le comportement du matériau avec la précision que l'on désire. La seconde permet alors, avec le schéma rhéologique adopté,un calcul réaliste de l'évolution des contraintes et des déplacements.

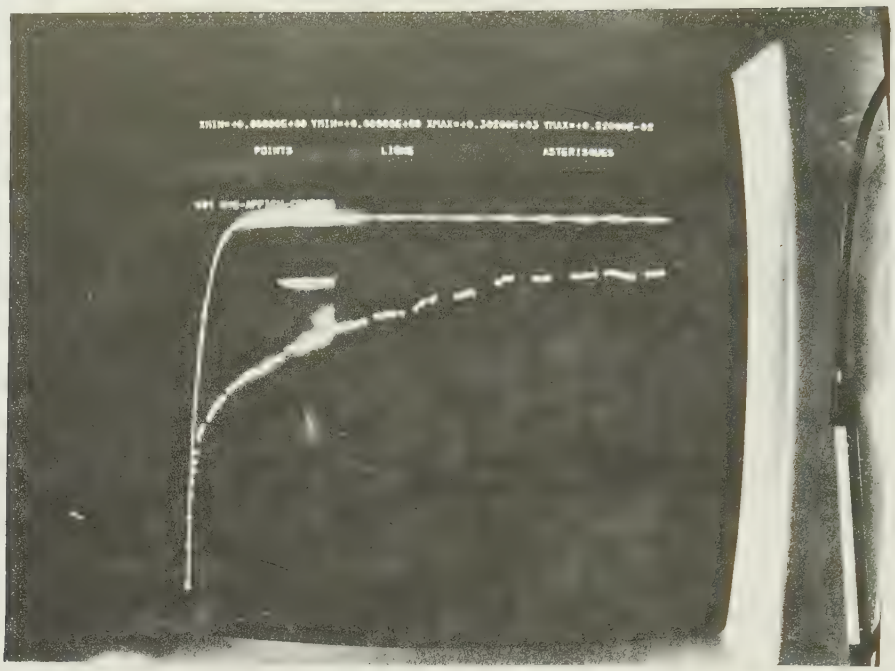


Figure 3

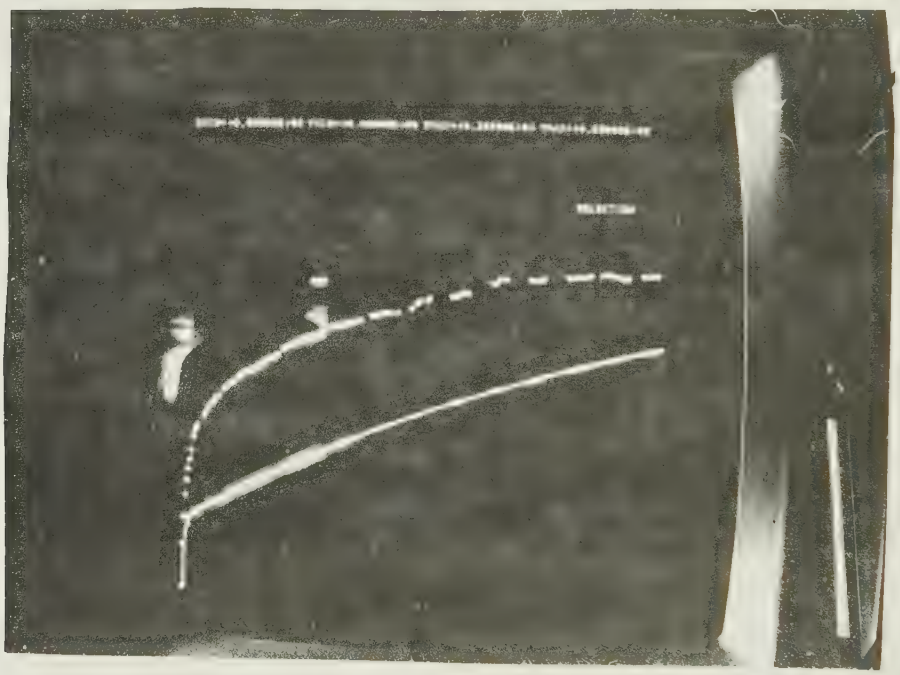


Figure 4

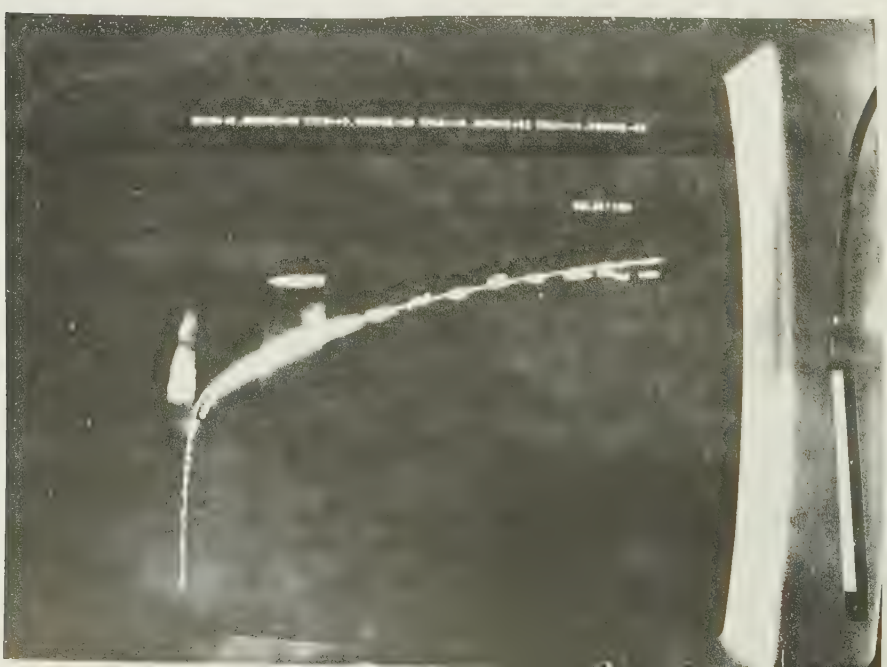


Figure 5

CHAPITRE III
-:-:-:-:-:-:-

RESOLUTION DES PROBLEMES ELASTOPLASTIQUES

Aprés avoir défini le type de loi de comportement pris en compte et exposé la méthode de résolution, nous montrerons les résultats numériques obtenus par notre programme PLASTAX de résolution des problèmes élastoplastiques dans un certain nombre de cas simples pour lesquels on dispose de solutions analytiques.Nous passerons ensuite à l'application au cas industriel des cavités de Gaz de France à Tersanne dans le chapître suivant.

I - LA LOI DE COMPORTEMENT ELASTOPLASTIQUE.

a) hypothèses préliminaires.

Les matériaux étudiés sont supposés isotropes et ne présentant pas de viscosité (ou soumis à des vitesses de chargement suffisamment faibles pour que les effets de la viscosité soient négligeables).

b) le critère de plasticité.

Soit $\delta \{\sigma\}$ un increment infinitésimal de contrainte à partir d'un état de contrainte initial $\{\sigma\}$.

La viscosité n'intervenant pas, l'incrément résultant $\delta \{\varepsilon\}$ de déformation est alors décomposable en une partie élastique $\delta \{\varepsilon\}^e$ qui est "récupérée" si l'on décharge, et une partie plastique $\delta \{\varepsilon\}^p$ éventuellement nulle qui correspond aux déformations permanentes :

$$\delta \{\varepsilon\} = \delta \{\varepsilon\}^e + \delta \{\varepsilon\}^p \qquad (3.1.)$$

$\delta \{\varepsilon\}^e$ est donné par les lois de l'élasticité :

$$\delta \{\varepsilon\}^e = \left[T\right]^{-1} \delta \{\sigma\} \qquad (3.2.)$$

où $\left[T \right]$ est la matrice des coefficients d'élasticité qui ne dépend que des coefficients de Lamé λ et μ dans le cas de l'isotropie.

L'apparition des déformations plastiques est fixée par le critère de plasticité C_r $(\{\sigma\},w)$, expression fonction de l'état de contrainte $\{\sigma\}$et de w, paramètre (ou ensemble de paramètres) définissant l'écrouissage.

Nous n'avons étudié que les matériaux ne présentant pas d'écrouissage (élastoplasticité parfaite) ou présentant un écrouissage isotrope.

c) Le potentiel plastique

D'après la théorie de l'élastoplasticité, le module de $\delta\{\varepsilon\}^P$ dépend de $\delta\{\sigma\}$ mais sa direction n'en dépend pas. [18] [11]

On dit que $\delta\{\varepsilon\}^P$ dérive d'un potentiel plastique s'il existe une fonction $P(\{\sigma\})$ telle que :

$$\delta\{\varepsilon\}^P = \chi \{\frac{\partial P}{\partial\{\sigma\}}\} \qquad (\chi>0)$$

On fait en général l'hypothèse dite "de normalité" ou"du travail maximal" (ou encore postulat de Drücker), ce qui revient à supposer que $\delta\{\varepsilon\}^P$ est normal à la frontière élastique d'équation $C_r(\{\sigma\},w)=0$ et dirigé vers l'extérieur.

Le critère Cr est alors potentiel plastique

Le principe de normalité est parfaitement vérifié pour les monocristaux obéissant à la Loi de Schmidt, assez bien pour les métaux obéissant au critère de Von Mises, mais conduit à des incohérences [14] dans le cas des roches ou des sols obéissant au critère de Coulomb.

Nous avons donc pris un potentiel plastique $P(\{\sigma\})$ pouvant être distinct du critère C_r mais tel que $\delta\{\varepsilon\}^P$ soit dirigé vers l'extérieur de la frontière élastique.

Le $\delta\{\varepsilon\}^P$ correspondant à $\delta\{\sigma\}$ est alors donné par :

	avec écrouissage	sans écrouissage
$\delta\{\varepsilon\}^P = \chi \{\frac{\partial P}{\partial\{\sigma\}}\}$ $(\chi>0)$	si $C_r=0$ et $d_w C_r>0$	si $C_r=0$ et $dC_r=0$
$\delta\{\varepsilon\}^P = 0$	si $C_r<0$ ou $d_w C_r<0$	si $C_r<0$ ou $dC_r<0$

(3.3.)

avec comme hypothèse : $\{\frac{\partial P}{\partial\{\sigma\}}\}^t\{\frac{\partial C_r}{\partial\{\sigma\}}\} > 0$ (3.4.)

$d_w C_r$ est la différentielle de C_r à écrouissage constant :

$$d_w C_r = \{\frac{\partial C_r}{\partial\{\sigma\}}\}^t d\{\sigma\}$$

Nous verrons par la suite qu'on doit imposer à P et C_r des conditions plus restrictives que (3.4.)

d) Matrice d'élastoplasticité.

Nous allons préciser la forme de la relation entre incrément de contrainte et incrément de déformation totale dans le cas où $\delta\{\varepsilon\}^P$ est non nul .

D'après (3.1.), (3.2.), et (3.3.), nous pouvons écrire :

$$\delta\{\varepsilon\} = [T]^{-1}\ \delta\{\sigma\} + \{\frac{\partial P}{\partial\{\sigma\}}\}\ \chi \qquad (3.5.)$$

Nous définissons un paramètre H par :

$$\chi\ H = -\frac{\partial C_r}{\partial w}\ \delta w$$

comme $C_r = 0$,nous avons :

$$dC_r = \{\frac{\partial C_r}{\partial\{\sigma\}}\}^t\ d\{\sigma\} + \frac{\partial C_r}{\partial w}\ dw = 0$$

Nous pouvons alors écrire :

$$\chi\ H = \{\frac{\partial C_r}{\partial\{\sigma\}}\}^t\ \delta\{\sigma\} \qquad (3.6.)$$

H est donc positif, s'il y a écrouissage, nul s'il n'y en a pas.

On élimine alors χ entre (3.5.) et (3.6.) en prenant soin de ne pas multiplier ni diviser par H, qui peut être nul.

On obtient alors une expression valable qu'il y ait ou non écrouissage (voir démonstration en annexe A2) :

$$\delta\{\sigma\} = [T_{ep}]\ \delta\{\varepsilon\} \qquad (3.7.)$$

avec :

$$[T_{ep}] = [T] - [T]\ \{\frac{\partial P}{\partial\{\sigma\}}\}\ \{\frac{\partial C_r}{\partial\{\sigma\}}\}^t\ [T]\ \frac{1}{M} \qquad (3.8.)$$

où :

$$M = H + \{\frac{\partial C_r}{\partial\{\sigma\}}\}^t\ [T]\ \{\frac{\partial P}{\partial\{\sigma\}}\} \qquad (3.9)$$

La matrice [Tep] sera appelée matrice d'élastoplasticité. Elle n'est symétrique que si le potentiel plastique P et le critère C_r sont identiques.

e) Critères pris en compte par le programme PLASTAX

Critère de Von Misès.

Il a pour expression :

$$CM = J_2^{1/2} - \frac{\bar{\sigma}}{\sqrt{3}} = 0 \qquad (3.10)$$

J_2 est le second invariant du déviateur des contraintes :

$$J_2 = \frac{1}{6}\left((\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2+6\sigma_4^2+6\sigma_5^2+6\sigma_6^2 \right)$$

et où $\bar{\sigma}$ (W) est la limite d'élasticité en contrainte monoaxiale, fonction du paramètre d'écrouissage W.

Dans l'espace des contraintes principales, la relation (3.10) est l'équation du cylindre circulaire d'axe (1,1,1,) et de rayon $\bar{\sigma}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

Le critère de Tresca ($t-\bar{\sigma}/_2 = 0$) est représenté dans ce même espace par un prisme hexagonal régulier inscrit dans le cylindre de Von Misès.(fig.6)

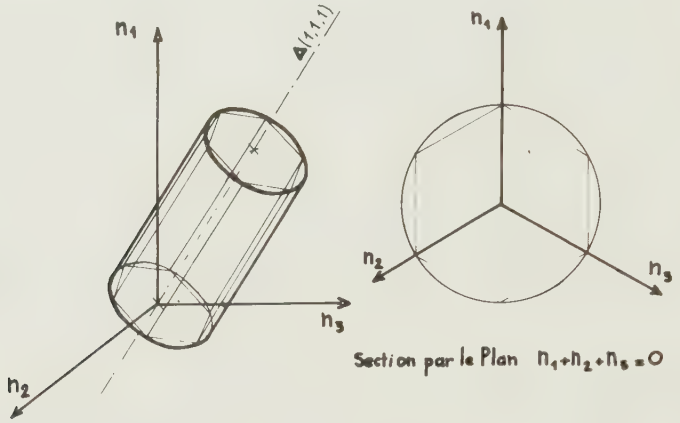
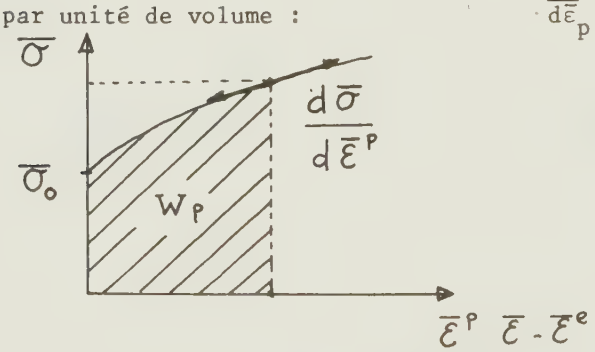


Figure 6

L'équation (3.10) définit un mode particulier d'écrouissage, appelé écrouissage isotrope, car il respecte les symétries de la frontière élastique.

Connaissant la courbe expérimentale contrainte-déformation en contrainte monoaxiale pour un chargement monotone croissant, on peut déduire la courbe donnant la contrainte monoaxiale $\bar{\sigma}$ en fonction de la déformation plastique $\bar{\varepsilon}_p$. ($\bar{\varepsilon}_p = \bar{\varepsilon} - \bar{\varepsilon}_e$).

On peut alors exprimer $\frac{d\bar{\sigma}}{d\bar{\varepsilon}_p}$ et $\bar{\sigma}$ en fonction du travail plastique dépensé par unité de volume :



$$\frac{d\bar{\sigma}}{d\bar{\varepsilon}_p} = h\,(W_p)$$

h est appelé module d'écrouissage du matériau.
Nous ne prenons en compte que les écrouissages durcissant ou la plasticité parfaite.
Nous avons donc :
$h\,(W_p) \geq 0$

Calculons l'expression de $\bar{\sigma}$ en fonction de W_p et de h :

$$dw_p = \bar{\sigma}\, d\bar{\varepsilon}^p$$

$$h dw_p = \bar{\sigma}\, d\bar{\sigma}$$

Nous obtenons : $\bar{\sigma} = \sqrt{\bar{\sigma}_o^2 + 2\int_0^{W_p} h(w_p)\,dw_p}$

si le module d'écrouissage h est constant nous obtenons :

$$\bar{\sigma} = \sqrt{\bar{\sigma}^2 + 2\,h\,w_p}$$

un seul paramètre, le travail plastique W_p dépensé par unité de volume, sufit donc pour définir l'état d'écrouissage du matériau :

Expression de $\{ \frac{\partial CM}{\partial \{\sigma\}} \}$

$$\frac{\partial CM}{\partial \sigma_i} = \frac{1}{2} \sigma'_i J_2^{-1/2} \quad \text{avec } \sigma'_i = \sigma_i - \frac{\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3}{3} \text{ pour } i = 1,2,3$$

(3.11)

$$\frac{\partial CM}{\partial \sigma_J} = \sigma_J J_2^{-1/2} \quad \text{pour } J = 4,5,6$$

Critère de Drücker

Le critère de Coulomb a comme expression : $t=C+n\,tg\,\phi$
où t et n sont respectivement les contraintes tangentielle et normale sur une facette donnée, C la cohésion et ϕ l'angle de frottement interne mesurés sur les courbes intrinsèques de limite élastique du matériau. Le critère de Coulomb définit dans l'espace des contraintes principales une pyramide à base hexagonale irrégulière possédant l'axe (1,1,1) comme axe de symétrie ternaire.

Le critère de Drücker a comme expression :

(3.12) $$CD = \alpha_1 I_1 + J_2^{1/2} - AK = 0$$

avec :

$$I_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$$

$$\alpha_1 = tg\phi / \sqrt{9 + 12\, tg^2\phi} \qquad AK = 3C / \sqrt{9+12tg^2\phi}$$

Il définit le cône inscrit dans la pyramide de Coulomb (fig.7)

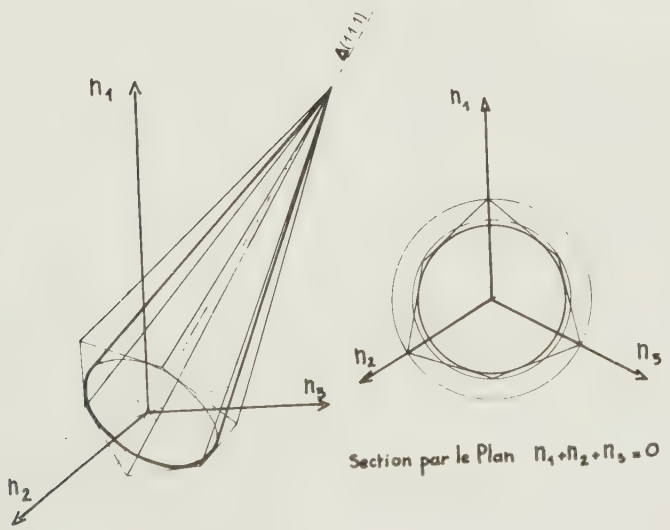


Figure 7

Nous n'avons utilisé ce critère que dans l'hypothèse de la plasticité parfaite.

expression de $\{ \frac{\partial CD}{\partial \{\sigma\}} \}$:

(3.13) $$\{\frac{\partial CD}{\partial \{\sigma\}}\} = \alpha_1 \{111\ 000\}^t + \{ \frac{\partial CM}{\partial \{\sigma\}} \}$$

α_1 varie entre 0 et $\frac{1}{\sqrt{12}}$ quand ϕ varie de 0 à 90°; pour $\alpha_1 = 0$, on retrouve le critère de Misès.

f) Potentiels plastiques pris en compte

Nous prenons le potentiel plastique sous la forme :

$$P = \alpha_2 I_1 + J_2^{1/2} \qquad (3.14)$$

où α_2 est une constante caractéristique du matériau.
Nous avons évidemment :

$$\{\frac{\partial P}{\partial \{\sigma\}}\} = \alpha_2 \{111\ 000\}^t + \{\frac{\partial CM}{\partial \{\sigma\}}\}$$

CM étant le critère de Misès défini en (3.10). La variation plastique de volume est donnée par :

$$(\frac{\delta v}{v})^p = 3\alpha_2 \chi \qquad (3.15)$$

La forme du potentiel plastique étant définie, nous pouvons préciser la signification physique du paramètre H qui intervient dans la matrice d'élasto-plasticité.

Nous discuterons ensuite la validité physique de ce potentiel plastique.

Signification physique du paramètre H

Nous avons posé par définition :

$$\chi H = \frac{\partial C_r}{\partial w} \delta w$$

Dans le cas du critère de Misès, le seul pour lequel nous ayons pris en compte l'écrouissage, nous avons :

$$\chi H = \frac{\partial CM}{\partial w_p} \delta w_p = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{d\bar{\sigma}}{dw_p} \delta w_p$$

en tenant compte des relations:

$$h = \frac{d\bar{\sigma}}{d\bar{\epsilon}_p} \qquad h dW_p = \bar{\sigma} d\bar{\sigma} \text{ et } J_2^{1/2} - \frac{\bar{\sigma}}{\sqrt{3}} = 0$$

nous tirons:

$$\chi H = \frac{1}{3} h J_2^{1/2} \delta w_p$$

Le travail plastique dépensé par unité de volume peut d'autre part s'écrire :

$$\delta w_p = \{\sigma\}^t \delta\{\epsilon\}^p = \chi \{\sigma\}^t \{\frac{\partial P}{\partial \{\sigma\}}\}$$

P étant une fonction homogène de degré 1 de $\{\sigma\}$, nous obtenons :

$$\delta w_p = \chi P \qquad (3.16)$$

Il vient alors :

$$H = \frac{1}{3} h J_2^{-1/2} P \qquad (3.17)$$

où h est le module d'écrouissage et P le potentiel plastique.

Validité physique du potentiel plastique choisi.

Nous avons imposé la condition (3.4.) :

$$\{\frac{\partial p}{\partial\{\sigma\}}\}^t \{\frac{\partial C_r}{\partial\{\sigma\}}\} > 0$$

Physiquement, le travail plastique δW_p doit être positif (c'est un travail dissipatif) :

D'après l'expression (3.16) du travail plastique et en tenant compte du fait que χ est positif, le potentiel plastique doit donc être positif :

$$P = \alpha_2 \; I_1 + J_2^{1/2} > 0 \qquad (3.18)$$

Si (3.18) est vérifiée, on voit sur l'expression (3.17) que H est positif ou nul.

Dans le calcul de la matrice d'élastoplasticité, (Annexe A2) nous avons divisé par le facteur :

$$M = H + \{\frac{\partial C_r}{\partial\{\sigma\}}\}^t |T| \{\frac{\partial P}{\partial\{\sigma\}}\}$$

Supposons que le critère C_r soit le critère de Drücker (on en déduit le cas du critère de Misès en annulant α_1)

Si nous posons : $A = \{\frac{\partial CM}{\partial\{\sigma\}}\}^t \{\frac{\partial CM}{\partial\{\sigma\}}\}$

le calcul nous donne :

$$A = \frac{1}{2} + \sum_{j=4,6} \sigma_j^2 \geqslant \frac{1}{2} > 0$$

$$\{\frac{\partial P}{\partial\{\sigma\}}\}^t \{\frac{\partial CD}{\partial\{\sigma\}}\} = 3\alpha_1 \alpha_2 + A \qquad (3.19)$$

$$M = H + 3(3\lambda + 2\mu)\alpha_1 \alpha_2 + 2\mu A \qquad (3.20)$$

Discutons le signe de P et des expressions (3.19) et (3.20) suivant les valeurs de α_1 et α_2

Soit $\{\sigma\}$ l'état de contrainte d'un point en déformation plastique. Plaçons nous dans l'espace des contraintes principales dans le plan contenant l'axe (1,1,1) et le vecteur contrainte $\{\sigma\}$ (fig.8, 9, 10)

En coordonnées cylindriques d'axe 111 et d'origine O, les équations CD=0 et P=0 donnent respectivement.

$$r = K\sqrt{2} - \alpha_1 \sqrt{6}\, z$$

$$r = -\alpha_2 \sqrt{6}\, z$$

Nous avons noté (CD) et (P) la trace de ces cônes sur le plan ($\{111\}$), $\{\sigma\}$ (fig. 8, 9, et 10).

Le travail plastique étant $\delta W_p = \{\sigma\}^t \delta \{\varepsilon\}^p$
On voit sur les figures (8), (9), et (10), apparaître les cas suivants :

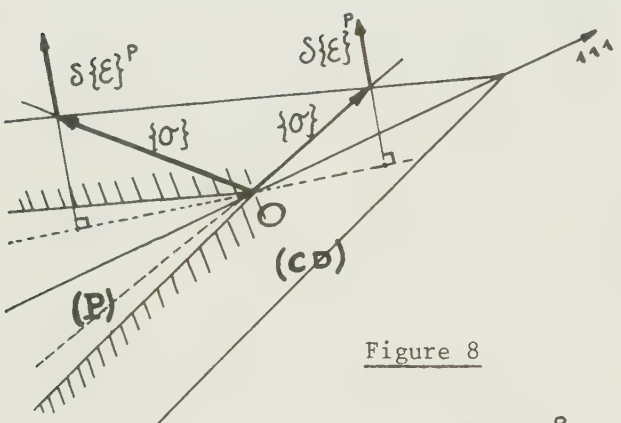


Figure 8

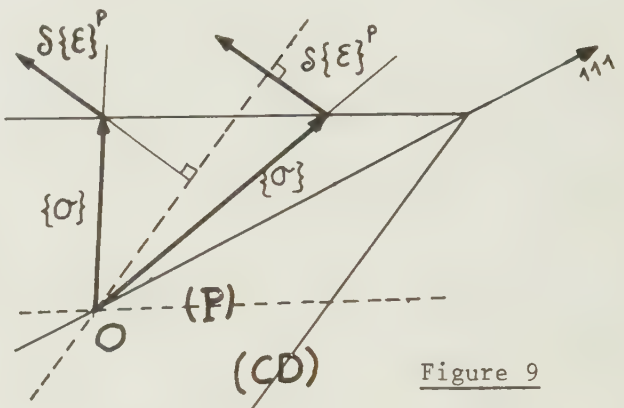


Figure 9

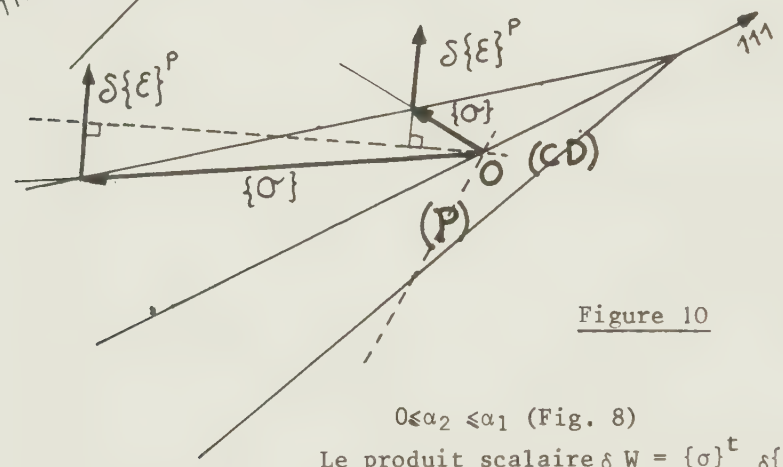


Figure 10

$0 \leqslant \alpha_2 \leqslant \alpha_1$ (Fig. 8)

Le produit scalaire $\delta W_p = \{\sigma\}^t \delta\{\varepsilon^p\}$ est toujours positif. D'autre part, les expressions (3.19) (3.20) sont strictement positives.

ou $\alpha_2 < 0$ (fig.9)
$\alpha_2 > \alpha_1$ (fig.10)

Il existe des états de contraintes où δW_p est négatif, ce qui est absurde.

Pour que l'expression du travail plastique ait un sens physique ($\delta W_p > 0$) il faut donc que l'on ait :

$$0 \leqslant \alpha_2 \leqslant \alpha_1$$

Considérons alors la variation plastique de volume (3.15). Si le matériau est parfaitement plastique, les déformations plastiques et donc χ, peuvent Prendre des valeurs arbitraires.

D'après (3.15) $(\frac{\delta V}{V})^p$ peut alors prendre des valeurs arbitraires, ce qui est physiquement absurde.

Il résulte de tout ceci, qu'en toute rigueur la seule valeur constante de α_2 qui soit physiquement acceptable est $\alpha_2 = 0$.

En réalité, α_2 peut être non nul pour la déformation plastique commençante, ($\alpha_2 > 0$ ou $\alpha_2 < 0$, suivant que la densité initiale est supérieure ou inférieure à la densité critique). α_2 doit ensuite tendre vers zéro quand la déformation plastique augmente.

Cependant, si les déformations plastiques sont peu importantes, et à condition de vérifier en outre dans les cas $\alpha_2 < 0$ ou $\alpha_2 > \alpha_1$ que

$$\delta W_p \text{ , M et } \{\frac{\partial P}{\partial \{\sigma\}}\}^t \{\frac{\partial C_r}{\partial \{\sigma\}}\}$$

sont positifs, on peut utiliser des valeurs constantes non nulles de α_2 pour prendre en compte des déformations avec diminution ou augmentation plastique de volume.

II - L'Algorithme de résolution.

Nous rappelons tout d'abord que les lois de l'élastoplasticité sont des lois incrémentales : il n'est pas possible, si le milieu présente des déformations plastiques, d'établir de relation entre l'état de contrainte total $\{\sigma\}$ et les déformations totales $\{\varepsilon\}$ Par contre, l'expression (3.7.) permet de calculer l'incrément de contrainte $\delta\{\sigma\}$ correspondant à un incrément donné de déformation $\delta\{\varepsilon\}$.

Pour pouvoir utiliser les lois de l'élastoplasticité, on doit donc appliquer les charges par incréments successifs .

D'autre part, pour chaque incrément, la relation (3.7.) n'est pas linéaire, puisque la matrice $[T_{ep}]$ dépend de l'état de contrainte total $\{\sigma\}$.

La forme des lois de l'élastoplasticité, nous oblige donc :
- a procéder par incréments de charge.
- à résoudre un problème non linéaire pour chaque incrément.

Les méthodes itératives sont le seul moyen systématique et général dont on dispose pour résoudre les problèmes non linéaires. Elles consistent à obtenir la solution cherchée par la résolution d'une série de problèmes linéaires.

a) Procédés itératifs utilisables pour la résolution de chaque incrément.

Soit $\Delta\{Q\}$ l'incrément de charge imposé et $[K]$ la matrice de raideur globale élastique. On peut distinguer schématiquement trois sortes de procédés itératifs :

A - Méthode "de la matrice de raideur variable" [20]

Le système $[K_{ep}(\{\sigma\})]\Delta\{U\} = \Delta\{Q\}$
est résolu de manière itérative en modifiant la matrice de raideur globale à chaque itération : pour les éléments en déformation plastique, on substitue à $[T]$, lors du calcul des matrices raideur élémentaires, la matrice $[T_{ep}]$ calculée avec l'état de contrainte trouvé à l'itération précédente.

L'inconvénient de cette méthode est qu'il faut recalculer la matrice de raideur globale et faire la résolution complète d'un nouveau système à chaque itération, ce qui n'est pas très économique.

B - Méthode "de la déformation initiale" [19]

Si $[T_{ep}]^{-1}$ existe, et s'il y a déformation plastique, (3.7.) peut s'écrire :

$$\delta\{\sigma\} = [T](\delta\{\varepsilon\} - \delta\{\varepsilon_{init}\})$$

en posant :

$$\delta\{\varepsilon_{init}\} = ([T]^{-1} [T_{ep}]^{-1}) \delta\{\sigma\}$$

ce qui donne, en passant au système global :

$$\delta\{Q\} + \delta\{F(\{\sigma\})\} = |K| \delta\{U\}$$

où $\delta\{U\}$ est la solution élastoplastique cherchée,
et $\delta\{F(\{\sigma\})$ le chargement correspondant au déplacement imposé $\delta\{\varepsilon_{init}\}$ par:

$$\delta\{f(\{\sigma\})\} = \iiint_{vol} [B]^t [T] \delta\{\varepsilon_{init}\} \, d(vol)$$

Le fait d'écrire le problème sous cette forme permet de faire apparaître un processus où la même matrice de raideur globale $[K]$ est utilisée en permanence, mais où le chargement, lui, varie à chaque itération.

Le gros inconvénient de cette méthode est qu'elle ne permet pas de prendre en compte la plasticité parfaite ; dans ce cas, en effet $[T_{ep}]^{-1}$ n'existe pas: il n'est pas possible de déterminer $\delta\{\varepsilon\}$ uniquement à partir de $\delta\{\sigma\}$ (nous avons toujours cependant: $\delta\{\sigma\} = [T_{ep}]\,\delta\{\varepsilon\}$)

C - Méthode "de la contrainte initiale" [14] [15].

Nous pouvons écrire (3.7.) sous la forme :

$$\delta\{\sigma\} = [T]\,\delta\{\varepsilon\} - \delta\{\sigma_{init}\}$$

en posant :

$$\delta\{\sigma_{init}\} = ([T] - [T_{ep}])\,\delta\{\varepsilon\}$$

ce qui donne, en passant au système global :

$$\delta\{Q\} + \delta\{F(\{\sigma\})\} = [K]\,\delta\{U\} \qquad (3.21)$$

où $\delta\{U\}$ est la solution élastoplastique cherchée et $\delta\{F(\{\sigma\})\}$, le chargement correspondant à l'état de contrainte $\delta\{\sigma_{init}\}$ imposé .

Pour chaque élément, nous avons ainsi :

$$\delta\{f(\{\sigma\})\} = \iiint_{vol} [B]\,\delta\{\sigma_{init}\}\,d(vol)$$

Les forces $\delta\{F\}$ sont appelées forces de rééquilibrage. Comme dans le cas précédent, nous voyons apparaître, pour résoudre (3.21), un processus itératif, permettant de garder la même matrice de raideur globale, et où seul le chargement varie à chaque itération.

Nous détaillerons ce processus itératif dans le paragraphe suivant.

Nous exposerons ensuite les avantages de la Méthode "de la contrainte initiale" qui nous ont conduit à choisir cette dernière méthode.

b) Algorithme employé dans PLASTAX.

- détail des opérations effectuées à chaque itération.

Soit $\{\sigma_o\}$ l'état de contrainte dans chaque élément avant l'application de l'incrément donné de charge $\Delta\{F_o\} = \Delta\{Q\}$

On calcule le nouvel état de contrainte $\{\sigma\}$ et l'incrément de déplacement $\Delta\{U\}$ par un certains nombre d'itérations.

Les opérations effectuées à l'itération numéro i sont les suivantes :

- Calcul de $\Delta\{U_i\}$ par résolution du système global

$$[K]\,\Delta\{U_i\} = \Delta\{F_{i-1}\}$$

- Pour chaque triangle élémentaire, les opérations suivantes sont alors effectuées :

-calcul de l'incrément $\Delta\{\sigma\}$ de contrainte en considérant l'élément comme élastique :

$$\Delta\{\sigma\} = [T][B]\,\Delta\{u_i\}$$

- test de $C_r(\{\sigma_{i-1}\} + \Delta\{\sigma\}, W_{i-1})$

- si $C \geqslant 0$, l'élément présente des déformations plastiques.

- si l'élément considéré était élastique, au cycle précédent, on calcule ξ tel que l'on ait :

$$C_r\ (\{\sigma_{i-1}\} + \xi\Delta\{\sigma\}, W_{i-1}) = 0$$

(détermination de l'état de contrainte pour lequel les déformations plastiques sont apparues.)

Si l'élément était déjà en déformation plastique, on a : $\xi = 0$

- On calcule l'incrément de contrainte élastoplastique qui correspondrait à des déplacements $\Delta\{u_i\}$ imposés :

$$\Delta\{\sigma_i\} = \Delta\{\sigma\} - (1-\xi)\ [V_{ep}]\ [B]\Delta\{u_i\}$$

avec :

$$[V^i_{ep}] = [T] - [T^i_{ep}]$$

$$[V^i_{ep}] = [T]\ \{\frac{\partial P}{\partial\{\sigma\}}\}\ \{\frac{\partial C_r}{\partial\{\sigma\}}\}^t\ [T]\ \frac{1}{M}$$

où $M = H + \{\frac{\partial C_r}{\partial\{\sigma\}}\}^t\ [T]\ \{\frac{\partial P}{\partial\{\sigma\}}\}$

$[V^i_{ep}]$ est calculé en prenant $\{\sigma_{i-1}\} + \Delta\{\sigma\}$ comme état de contrainte.

On calcule les forces nodales $\Delta\{f_i\}$ qui rééquilibrent $\Delta\{\sigma\} - \Delta\{\sigma\}_i$ par :

$$\Delta\{f_i\} = \iiint_{vol} [B]^t\ [V^i_{ep}]\ [B]\ (1-\xi)\ \Delta\{u_i\}d(vol)$$

- On calcule $\{\sigma_i\} = \{\sigma_{i-1}\} + \Delta\{\sigma\}_i$

- On calcule le travail plastique dépensé en moyenne par unité de volume, de l'élément par :

$$W_i = W_{i-1} + \Delta W_i$$

$$\Delta W_i = \frac{1}{vol} \iiint_{vol} \{\sigma_{i-1}\}^t\ ((1-\xi)\ [B]\Delta\{u_i\} - [T]^{-1}\ \Delta\{\sigma_i\})\ d(vol)$$

- si $C < 0$ l'élément se déforme élastiquement, on a alors :

$$\{\sigma_i\} = \{\sigma_{i-1}\} + \Delta\{\sigma\}$$

$$\Delta\{f_i\} = \{0\}$$

$$W_i = W_{i-1}$$

- On passe alors à l'élément suivant.

Quand toutes ces opérations ont été effectuées pour chaque triangle, comme on fait au fur et à mesure du calcul des $\Delta\{f_i\}$ la somme des forces qui, provenant d'éléments différents s'appliquent aux **mêmes** noeuds, on dispose du vecteur force de rééquilibrage global $\Delta\{F_i\}$.

Si $\Delta\{F_i\}$ est assez petit, le processus s'arrête, sinon il repart pour une nouvelle itération.

- Schématisation du processus.

Nous pouvons remarquer que le processus exposé revient à effectuer les opérations suivantes :

$$\left.\begin{array}{l} \text{- calcul de } \Delta\{U_1\} \quad \text{par} \quad [K]\ \Delta\{U_1\} = \Delta\{Q\} \\ \text{- calcul des forces de rééquilibrage } \Delta\{F_1\} \text{ par :} \\ \quad \Delta\{F_1\} = ([K] - [K_{ep}^1])\,\Delta\{U_1\} \\ \text{- calcul de } \Delta\{U_2\} \text{ par} \\ \quad [K]\ \Delta\{U_2\} = \Delta\{F_1\} \\ \text{- calcul de } \Delta\{F_2\} \text{ par} \\ \quad \Delta\{F_2\} = ([K] - [K_{ep}^2])\,\Delta\{U_2\} \end{array}\right\} \quad (3.22)$$

-etc...

où $[K_{ep}^i]$ serait la matrice de raideur globale élastoplastique obtenue en substituant à $[T]$ $[T_{ep}^i]$ calculé à l'itération i.

(comme nous l'avons vu, cette matrice globale n'est en fait pas calculée, mais tout se passe comme si elle l'était).

Si le processus converge, les forces de rééquilibrage $\Delta\{F_i\}$ deviennent négligeables (inférieures à un seuil choisi), après un certain nombre d'itérations.

Le champ de contraintes trouvé est statiquement et plastiquement admissible, d'autant plus près de la solution exacte que : $\Delta\{Q\}$ est plus petit.

Si l'on fait la somme de toutes les équations, (3.22), on obtient :

$$\Delta\{Q\} = \sum_i \left[K_{ep}^i\right]\ \Delta\{U_i\}$$

ce qui traduit bien la non linéarité du problème.

Si l'on fait la somme des $\Delta\{F_i\}$, on obtient :

$$\sum_i \Delta\{F_i\} = [K] \sum_i \Delta\{U_i\} - \sum_i [K_{ep}^i]\Delta\{U_i\}$$

ce qui donne, en mettant en évidence la variation totale des déplacements $\Delta\{U\} = \sum_i \Delta\{U_i\}$:

$$\Delta\{Q\} + \sum_i \Delta\{F_i\} = [K]\ \Delta\{U\}$$

La somme des forces de rééquilibrage représente ainsi le chargement fictif qu'il faut ajouter au chargement réel pour obtenir les déplacements élastoplastiques comme solution d'un problème élastique (cf.équation 3.21).

Remarque :

A chaque itération, le champ de contrainte $\{\sigma_i\}$ trouvé est plastiquement admissible, mais n'est pas en équilibre avec le chargement $\Delta\{Q\}$ imposé.

On voit donc que le processus de calcul revient physiquement à choisir un trajet de charge particulier pour appliquer l'incrément $\Delta\{Q\}$

- Convergence du processus.

L'expérience montre que les forces de rééquilibrage diminuent régulièrement et rapidement (fig. 16), sauf dans le cas de la plasticité parfaite non contenue, où elles restent rigoureusement égales à elles-mêmes d'un cycle à l'autre.

Dans ce cas, le dernier incrément pour lequel le processus a convergé donne alors une approximation par défaut de la charge limite.

- Avantages du Processus.

- On doit résoudre à chaque itération le même système global où seul le second membre (les forces) change.

On utilise donc, comme pour la viscoélasticité, une méthode directe de résolution du système linéaire global, et l'on rend la matrice de raideur globale triangulaire une fois pour toutes, ce qui permet des gains de temps considérables.

- On peut prendre en compte indifféremment la plasticité avec ou sans écrouissage, et ceci avec le même traitement, (ce qui n'est pas le cas de la méthode B).

- Dans le cas des matériaux non standards, nous avons vu que $[T_{ep}]$ n'est pas symétrique. Par la méthode A, (matrice de raideur variable), on obtiendrait alors une matrice de raideur globale non symétrique, ce qui double pratiquement son encombrement en mémoire.

Vu la taille des matrices de raideur globales, l'emploi de la méthode A pour les matériaux non standards est pratiquement exclu.

Par contre, dans la méthode C, (contrainte initiale), la matrice de raideur globale reste symétrique.

- La méthode C est moins sensible que la méthode A à la taille des incréments de charge (cf. [14])

En procédant par grands incréments de charge, on obtient un champ de contrainte moins proche de la solution exacte, mais néanmoins statiquement et plastiquement admissible, ce qui permet de trouver des approximations par défaut de la charge limite.

- le même traitement permet de prendre en compte la charge et la décharge.

La conjonction de tous ces avantages nous a fait préférer la méthode C, aux méthodes A et B.

C) Comparaison des modes de convergence des méthodes A et C.

Graphiquement, la convergence de la première méthode revient à utiliser la sécante, (fig.11a)la seconde à utiliser une pente constante (fig.11b)

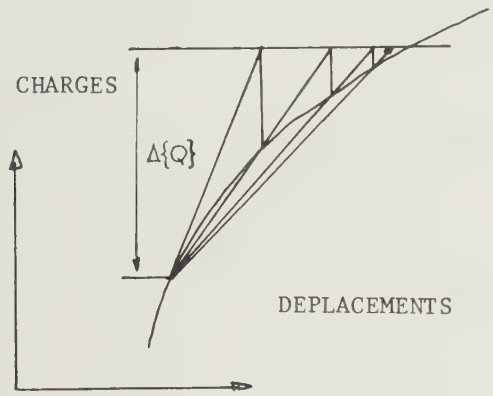


Figure 11a

Méthode de la raideur variable.

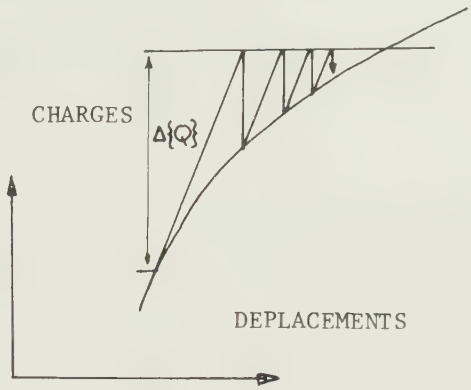


Figure 11b

Méthode de la contrainte initiale

La méthode A converge donc mathématiquement plus rapidement : Pour un même incrément, de charge ΔQ, il faut plus d'itérations à la méthode C pour converger, mais chaque itération de la méthode C est (pour les raisons de calcul numérique que nous avons signalées) beaucoup plus rapide à effectuer que chaque itération de la méthode A.

En fait, il est vraisemblable que la méthode A est plus rapide dans les cas où les zones plastiques sont très étendues, et l'écrouissage faible ou nul. Mais alors,on peut employer pour la méthode C des procédés d'accélération :

Supposons, par exemple, qu'à l'incrément n égal à Δ{Q}, on ait trouvé Δ {σ} et Δ{ U}. Si l'incrément n+1 est égal à λ^2 Δ{ Q }, on peut initialiser le processus avec λ^2 Δ{σ} et λ^2 Δ {U} .(fig. 12).

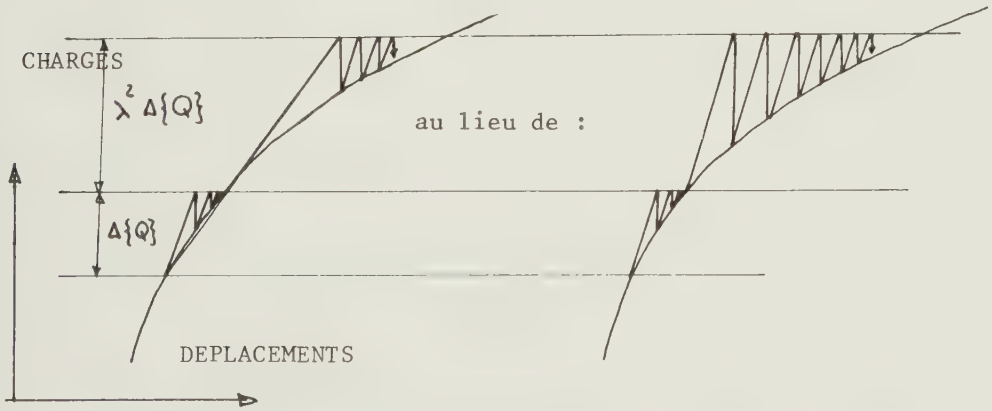


Figure 12 Procédé d'accélération

III - Comparaison des résultats du programme PLASTAX avec des solutions analytiques.

Nous avons effectué la comparaison des résultats numériques avec les solutions analytiques pour un certain nombre de problèmes simples.

Dans tous les cas, nous avons trouvé un excellent accord avec les solutions analytiques.

Les calculs ont été effectués sur CDC 6600.

a) Tests de la limite élastique pour des répartitions très simples de contrainte

Nous avons effectué ces tests avec un maillage très rudimentaire : il comprenait en effet 8 éléments et 9 noeuds (fig.13)

conditions aux limites:
u = 0 sur 1.4.7.
v = 0 sur 1.2.3.
pressions sur 7.8.9.

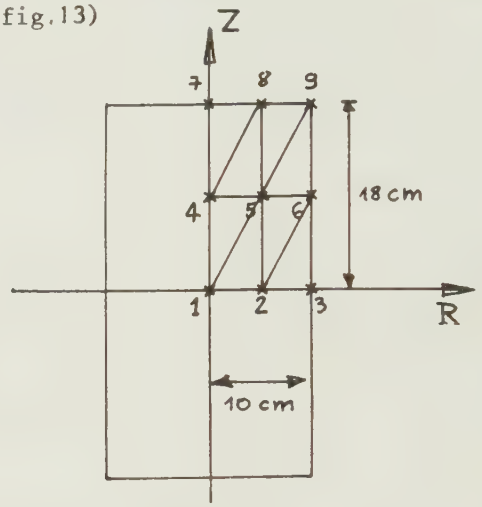


Figure 13

à cause des symétries, on n'étudiait que le quart de la structure.

L'éprouvette était supposée chargée sur sa face supérieure sous une pression uniforme P. Le programme fournit pour chaque élément le coefficient ξ qui permet de savoir pour quel état de contrainte l'élément considéré a commencé à présenter des déformations plastiques.

Nous avons traité le cas de l'éprouvette sous chargement monoxial en déformation ou en contraintes planes, et dans le cas où l'axe OY est axe de révolution, avec le critère de Misès et celui de Drücker , avec le potentiel plastique identique au critère. Chaque fois, les résultats ont été les suivants :

ξ est le même pour tous les éléments, la limite d'élasticité est donc bien atteinte simultanément dans tous les éléments.

- Si un incrément fait passer d'une pression P_1 inférieure à la limite d'élasticité L_e à une pression P_2 supérieure à cette limite , $P_1 + \xi P_2$ donne la limite d'élasticité avec un écart relatif par rapport à la solution exacte inférieur à 4×10^{-3} , et ceci, quelle que soit la taille de l'incrément $P_2 - P_1$.

Nous avons obtenu les limites élastiques avec la même précision dans le cas de l'éprouvette cylindrique sous chargement triaxial. (n_2, $n_1 = n_3$).

b) Eprouvette cylindrique en traction simple avec écrouissage.

Nous avons utilisé le même maillage que précédemment (Fig.13).

Le matériau est supposé obéir au critère de Misès avec écrouissage isotrope.

Les caractéristiques du matériau sont :
E = 700.000 bars $\quad \nu = 0,20$
h = 350.000 bars $\quad \bar{\sigma}_o = 2430$ bars

Le potentiel plastique est pris identique au critère.

La limite élastique en traction simple étant 2430 bars, on impose un incrément de charge qui fait passer de 2400 bars à 2448 bars.

On voit sur les figures 14,15,16, comment converge le processus.

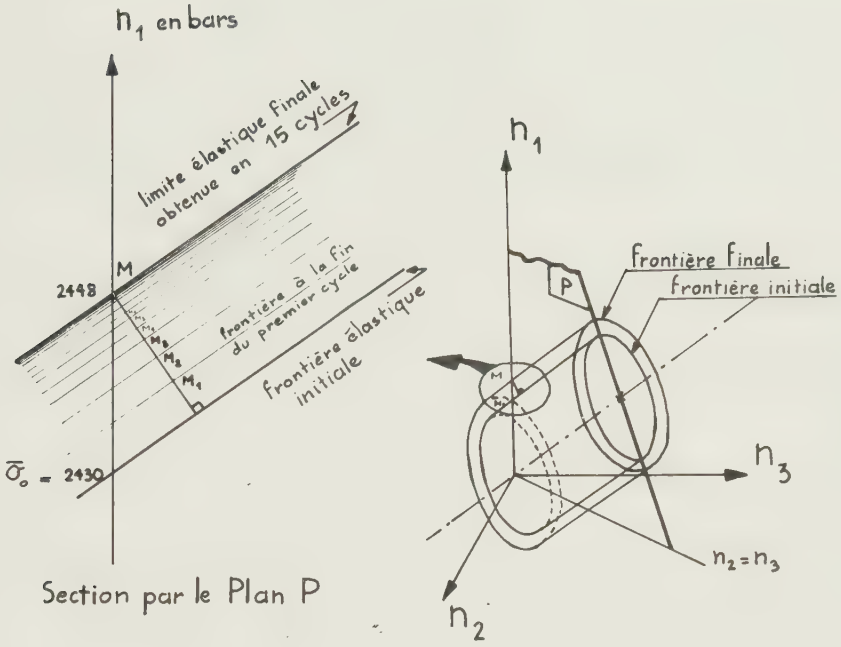


Figure 14

Le point M_i représentatif de l'état de contrainte à la fin du cycle i tend vers le point M de charge imposé (fig.14). Après 15 cycles de résolution (2 secondes de mémoire centrale de CDC 6600), les résultats numériques coïncident exactement avec la solution analytique, ce qui, compte tenu du nombre de chiffres significatifs avec lesquels nous avons fait éditer les résultats, donne un écart relatif par rapport à la solution exacte inférieur à 5×10^{-4} pour les contraintes, 10^{-4} pour les déplacements, 10^{-4} pour le travail plastique dépensé par unité de volume.

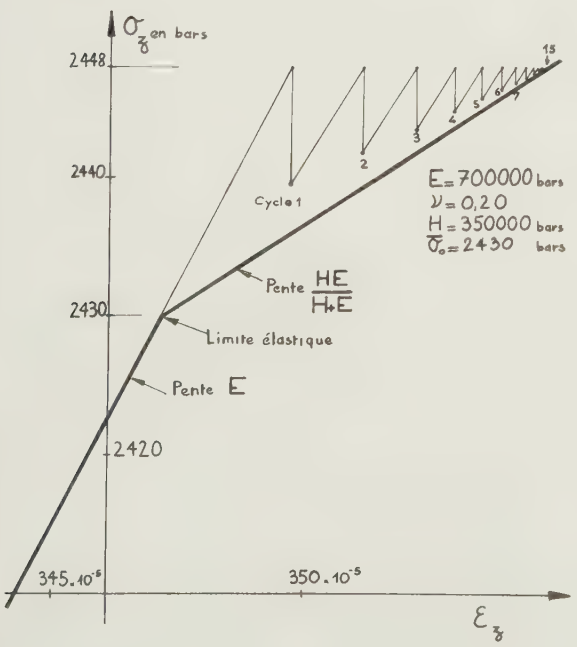


Figure 15

Figure 16

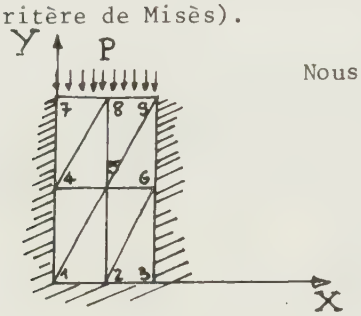
c) Eprouvette frettée au-delà de la limite d'élasticité.

déformations planes. Plasticité parfaite.

Nous avons pris les mêmes caractéristiques mécaniques que précédemment, mais sans écrouissage :

E = 700.000 bars $\quad \nu = 0,20 \quad$ $\bar{\sigma}_o$ = 2430 bars

(critère de Misès).



Nous avons employé le même maillage que précédemment avec les conditions aux limites suivantes :
u = 0 sur 1.4.7. et 3.6.9.
v = 0 sur 1.2.3.
pression uniforme P appliquée sur 7.8.9.

- Etudions ce qui se passe lorsque la pression P est augmentée progressivement :

Dans le domaine élastique, nous avons :

$$\sigma_x = \sigma_z = \frac{\nu}{1-\nu}\,\sigma_y$$

$$\varepsilon_x = \varepsilon_z = 0$$

$$\varepsilon_y = \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{E(1-\nu)}\,\sigma_y$$

Le critère de Misès se réduisant à $|\sigma_y - \sigma_x| = \sigma_o$ les déformations plastiques apparaissent pour la valeur σ_y lim donnée par :

$$\sigma_{ylim} = + \bar{\sigma}_o \frac{1-\nu}{1-2\nu}$$

On doit donc trouver ici :

$$\sigma_{ylim} = 2430 \times \frac{8}{6} = 3240 \text{ bars}$$

Dans le domaine plastique, nous avons alors :

$$\sigma_x = \sigma_z = \sigma_y - \bar{\sigma}_o$$

$$\varepsilon_x = \varepsilon_z = 0$$

$$\varepsilon_y = \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{E(1-\nu)}\,\sigma_{ylim} + \frac{3(1-2\nu)}{E}(\sigma_y - \sigma_{ylim})$$

- Nous voyons donc que les cercles de Mohr croissent d'abord en respectant une homothétie de centre O jusqu'à la limite élastique.

Au delà, ils subissent une simple translation. (Fig. 17)

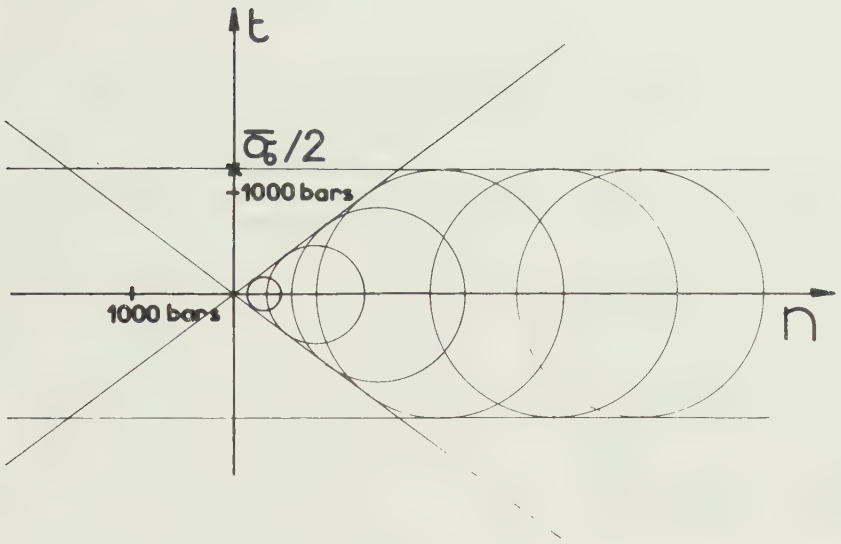


Figure 17

- Si après avoir chargé l'éprouvette sous une contrainte verticale $\sigma_{y\ max}$ supérieure à $\sigma_{y\ lim}$, on baisse la pression nous obtenons :

$$\sigma_x = \sigma_z = \sigma_{ymax} - \bar{\sigma}_o - \frac{\nu}{1-\nu}(\sigma_{ymax} - \sigma_y)$$

(décharge élastique).

Si on baisse la pression jusqu'à l'annuler, nous voyons qu'il doit rester des contraintes résiduelles : (fig. 18) :

$$\sigma_x = \sigma_z = \frac{1-2\nu}{1-\nu}\ \sigma_{ymax} - \bar{\sigma}_o$$

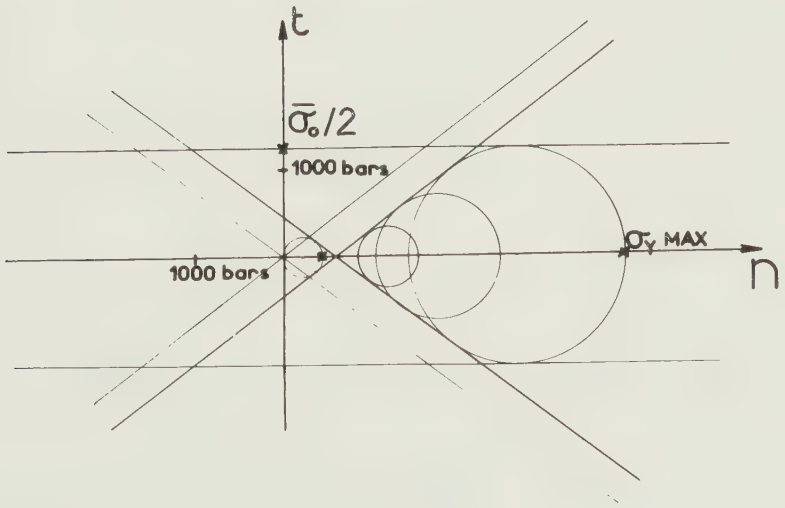


Figure 18

- Nous avons effectué les calculs suivants :
A - charge en compression à 3200 bars.
B - charge en compression à 3360 bars.
C - charge en compression à 3520 bars.
D - décharge jusqu'à annulation de la pression.
E - charge en traction à-3240 bars (= $-\sigma_{ylim}$)
F - décharge jusqu'à annulation de la pression.

Nous avons représenté schématiquement figure 19, le cycle effectué.

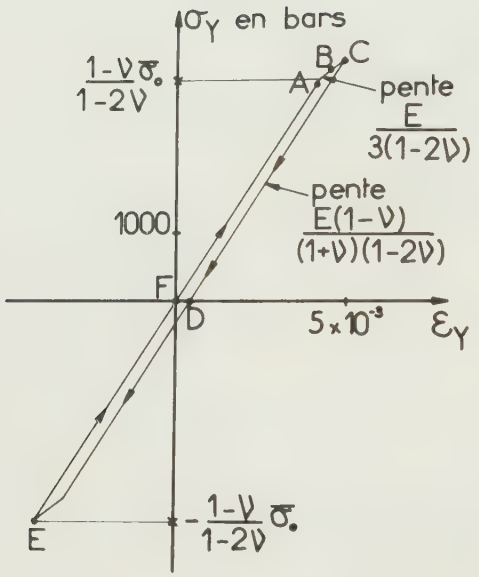


Figure 19

Les contraintes et les déplacements calculés par le programme PLASTAX coïncident à moins de 3×10^{-4} près avec les valeurs calculées directement sur les expressions analytiques.

Ainsi, pour les contraintes PLASTAX a donné :

A	$\sigma_y = 3200.0$ $\sigma_x = 800.0$ $\sigma_z = 800.0$	B	$\sigma_y = 3360.0$ $\sigma_x = 930.0$ $\sigma_z = 930.0$
C	$\sigma_y = 3520.0$ $\sigma_x = 1090.0$ $\sigma_z = 1090.0$	D	$\sigma_y = 0.0$ $\sigma_x = 210.0$ $\sigma_z = 210.0$
E	$\sigma_y = -3240.0$ $\sigma_x = -810.0$ $\sigma_z = -810.0$	F	$\sigma_y = 0.0$ $\sigma_x = 0.0$ $\sigma_z = 0.0$

Nous avons représenté les cercles de Mohr correspondant sur la figure 20.

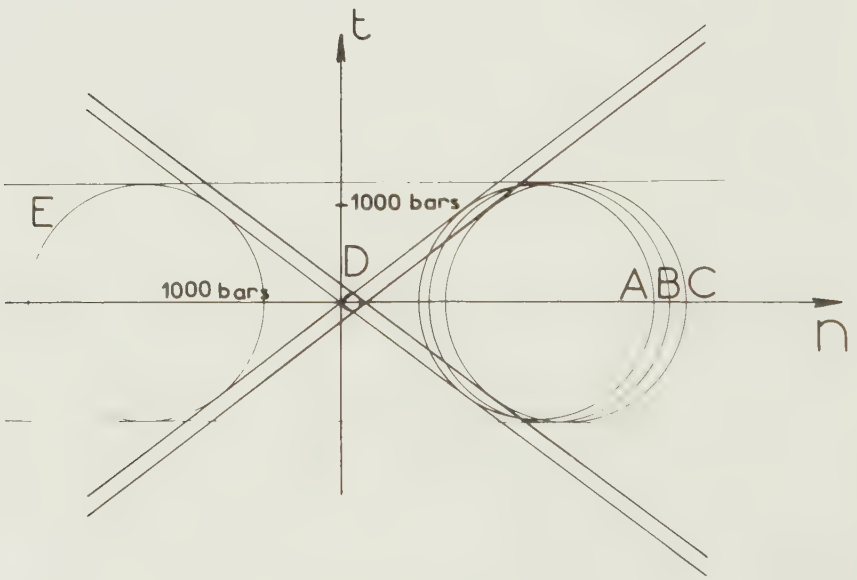


Figure 20

L'éprouvette a atteint une première fois la limite d'élasticité entre A et B. Nous avons obtenu $\xi = 0.250$

Ce qui donne pour $\sigma_{y\ lim}$ rigoureusement la solution exacte : $3200 + \xi\ 160 = 3240$ bars.

L'éprouvette a atteint une deuxième fois la limite d'élasticité entre D et E.

Nous avons obtenu $\xi = 0,9136$, ce qui donne :

$$\sigma'_{ylim} = \xi \quad (-3240) = -2960.064 \text{ bars}$$

La solution exacte étant :

$$\sigma'_{lim} = \sigma_{ymax} - \frac{2(1-\nu)}{(1-2\nu)} \bar{\sigma}_o$$

soit :

$$\sigma'_{lim} = 3520 - \frac{1,6}{0,6} \; 2430 = -2960 \text{ bars}$$

Calcul du travail plastique dépensé :

Le calcul théorique du travail plastique; dépensé par unité de volume au cours du cycle de charge complet donne : (Surface du cycle, fig.19)

$$W_p = \frac{3(1-2\nu)}{2E} \sigma_{ymax} - \frac{3(1-\nu)}{2E} \bar{\sigma}_o$$

ce qui donne :

$$W_p = 2,3328 \text{ kg/cm}^2$$

Le programme PLASTAX donne :

$W_p = 2,33237$ kg/cm^2 soit une erreur relative inférieure à 2.10^{-4}

La résolution complète du problème a demandé 3 secondes de mémoire centrale de CDC 6600.

d) Cavité cylindrique de révolution en milieu élastoplastique.

Nous avons étudié, dans le cadre de l'élastoplasticité parfaite, et avec les caractéristiques du sel de Tersanne, le comportement d'une cavité cylindrique de 30 m de rayon, dans un massif où règne initialement une pression de 350 bars, lorsque la pression dans la cavité diminue.

Nous avons porté sur les figures 21, 22 , 23 , les résultats obtenus de 5 manières différentes :

- Trois solutions analytiques utilisant le critère de Coulomb :
  - A1 Solution par J.MANDEL
  - A2 Solution par J.SALENÇON avec le critère de Coulomb comme potentiel plastique.
  - A3 Solution par J.SALENÇON, sans variation plastique de volume.
- Deux solutions numériques données par PLASTAX.
  - solution numérique 1 : avec le critère de DRÜCKER , comme critère et potentiel plastique.
  - solution numérique 2 : avec le critère de DRÜCKER , comme critère et $J_2^{1/2}$ comme potentiel plastique (pas de variation plastique de volume).

On voit que, malgré l'émploi d'incréments de charge très importants, (le point 85 bars de la solution numérique A a été atteint en partant non pas de 135 bars, mais de 185 bars), la solution numérique 1 concorde remarquablement avec A2, qui utilise un potentiel du même type.

On remarque d'autre part, que les solutions A2 et A3 sont pratiquement identiques, et ne différent sensiblement que pour la variation relative de rayon (fig.21,22)et ceci, à partir d'une extension importante de la zone plastique. C'est dû à la faible valeur de l'angle de frottement interne du sel de Tersanne ($\phi = 14°$)

La pression d'apparition de la zone plastique donnée par le programme est rigoureusement celle qui est donnée par les solutions analytiques : 221,2 bars.

La résolution complète des 8 incréments de la solution numérique a demandé 130 s. de mémoire centrale de CDC 6600 (avec l'algorithme de base, sans processus d'accélération).

Nous avons ensuite repris la résolution pour calculer l'état de la cavité à 185 bars, en faisant varier la taille, et donc le nombre,des incréments de pression employés pour parvenir à 185 bars.

Nous avons pu ainsi vérifier que la méthode n'est pas très sensible à la taille des incréments de charge, et que le fait de procéder par grands incréments est plus économique pour le calcul.

IV - Possibilités actuelles de Plastax.

PLASTAX permet de traiter les problèmes élastoplastiques concernant des solides de formes quelconques, mais relativement massives (exclusion des coques et structures élancées),formés d'un nombre quelconque de matériaux et sous des chargements complexes dans les cas suivants :

- problèmes plans ou à symétrie de révolution pour les petites déformations et petits déplacements.
- critère de Misès avec ou sans écrouissage isotrope, ou critère de Drücker sans écrouissage.
- potentiel plastique pouvant être différent du critère.

PLASTAX donne dans tous ces cas, une solution qui vérifie les conditions d'équilibre, de compatibilité et le critère de plasticité. On obtient ainsi :

- les déplacements de tous les noeuds.
- les contraintes dans tous les éléments.
- la forme des zones plastiques.
- le travail plastique dépensé par unité de volume dans chaque élément.
- les contraintes principales.

On peut d'autre part, déterminer pour quel chargement les premiers éléments plastiques apparaissent, et plus généralement, à partir de quel chargement un élément donné présente des déformations plastiques.

Dans son organisation actuelle le programme PLASTAX est entièrement gouverné par cartes données. L'ajustement de la taille des tableaux est réalisé automatiquement.

Plastax a une structure permettant de traiter un problème donné en un seul passage, ou en plusieurs passages successifs en machine. Dans ce dernier cas, on peut analyser les résultats de chaque passage avant d'effectuer le suivant et ainsi, à chaque étape du traitement intervenir sur le traitement lui-même. On peut aussi reprendre la résolution à partir des résultats du passage déjà effectué que l'on veut. C'est très pratique si à partir d'un état donné on souhaite étudier différents cas de chargement, ou étudier la conséquence de la cassure brutale de certains éléments.

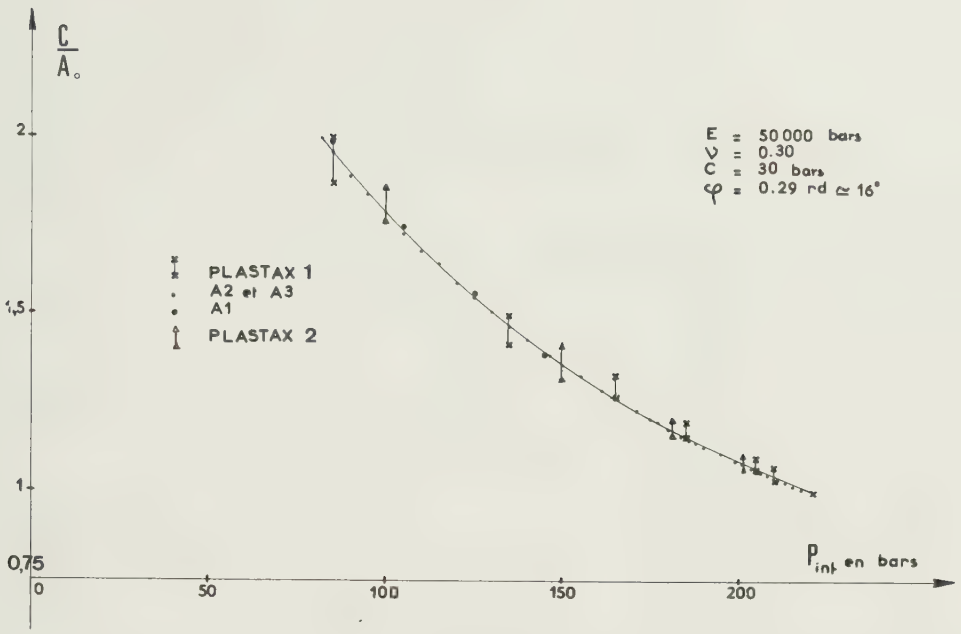


Figure 21

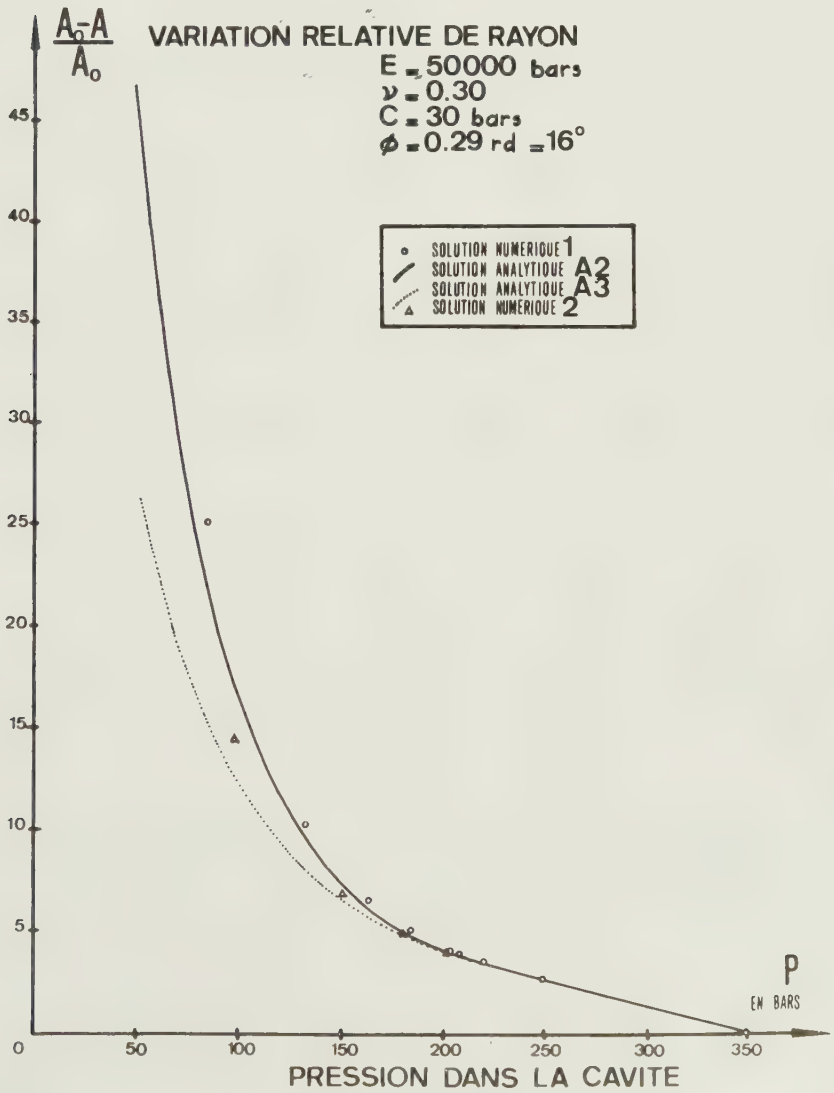
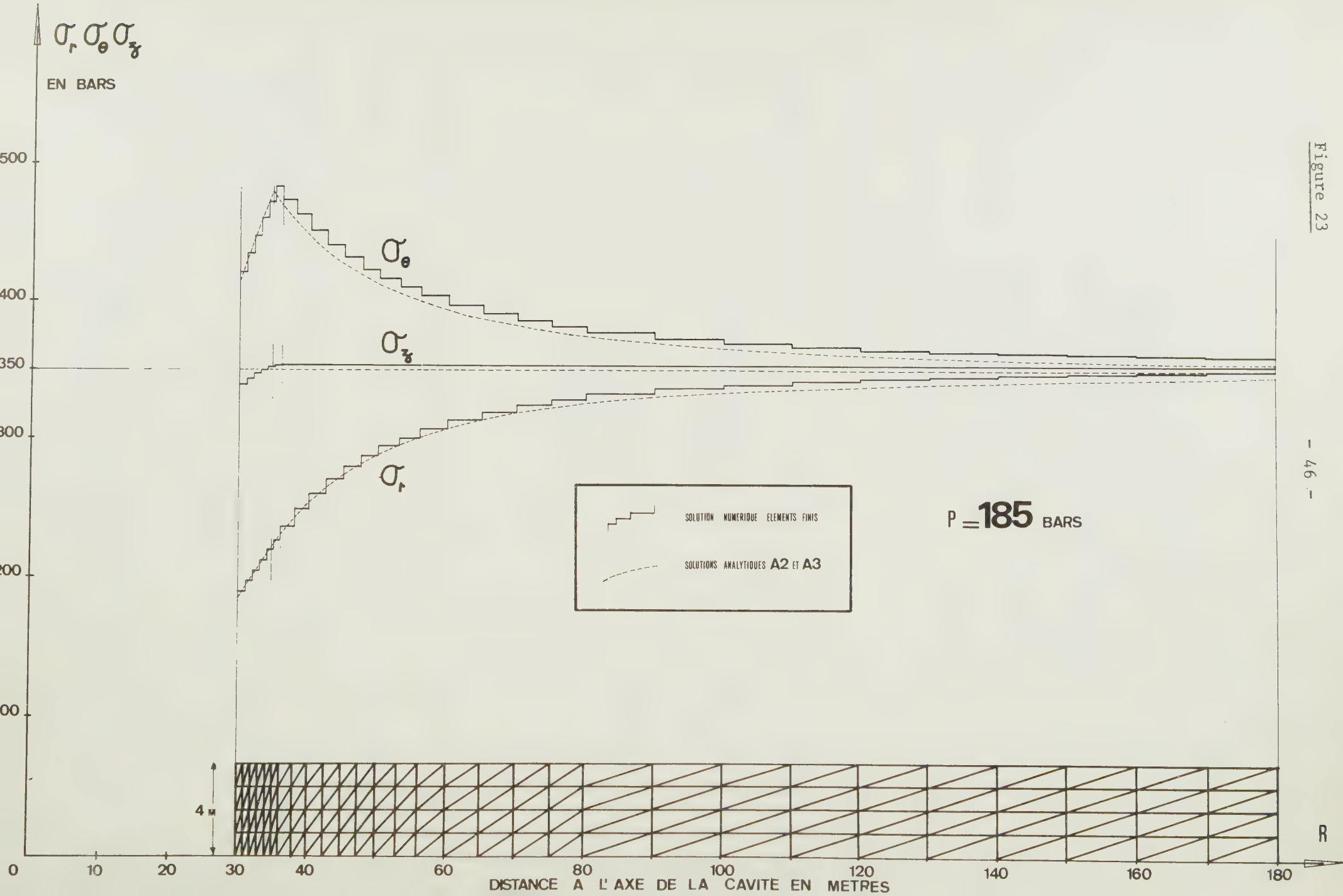


Figure 22


σr σθ σz
EN BARS
500
400
350
300
200
00
σθ
σz
σr
SOLUTION NUMERIQUE ELEMENTS FINIS
SOLUTIONS ANALYTIQUES A2 ET A3
P = 185 BARS
4 M
R
0
10
20
30
40
60
80
100
120
140
160
180
DISTANCE A L'AXE DE LA CAVITE EN METRES

CHAPITRE IV

ETUDE DES CAVITES DE STOCKAGE DE GAZ EN COUCHE DE SEL

I- PRESENTATION DU PROBLEME

a) nécessité et rôle du stockage.

La nécessité du stockage doit son apparition à la modification des sources d'approvisionnement en gaz, d'une part, au changement du profil des consommations d'autre part, :

- la part du gaz naturel dans les ventes de Gaz de France a progressivement augmenté pour atteindre actuellement plus des trois quarts des thermies gaz vendues. Or, l'approvisionnement en gaz naturel ne peut se faire qu'à débits pratiquement constants : les réseaux de gazoducs ne permettent pas, en effet, de faire passer les débits de pointe nécessaires, et surtout, les contrats avec les pays producteurs de gaz naturel sont beaucoup plus avantageux lorsque le débit enlevé est constant.

- l'utilisation croissante du gaz pour le chauffage domestique a progressivement accentué non seulement le déséquilibre général des consommations entre l'hiver et l'été, mais surtout les débits de pointe (très brusque augmentation de la demande les jours de grands froids).

Pour résoudre ces problèmes d'écrêtement et de modulation saisonnière, il est ainsi devenu indispensable de disposer de réserves de gaz à proximité immédiate des centres de grande consommation.

b) Problème du stockage pour la région Lyonnaise.

Les stockages souterrains en nappe aquifère qui permettent la constitution de réserves de plusieurs centaines de millions de mètre cubes de gaz, peuvent assurer l'écrêtement et la modulation saisonnière.(stockage de Beynes et Saint Illiers pour la région Parisienne).

Les possibilités offertes par les couches de sel, de créer des cavités par lessivage sont utilisées depuis plusieurs années aux U.S.A. pour le stockage à faible profondeur de butane ou de propane, plus récemment aux U.S.A. et au Canada (Saskatchewan) pour le gaz naturel. Cette technique se développe actuellement en France pour le propane, l'éthylène, le pétrole brut et le gaz naturel.

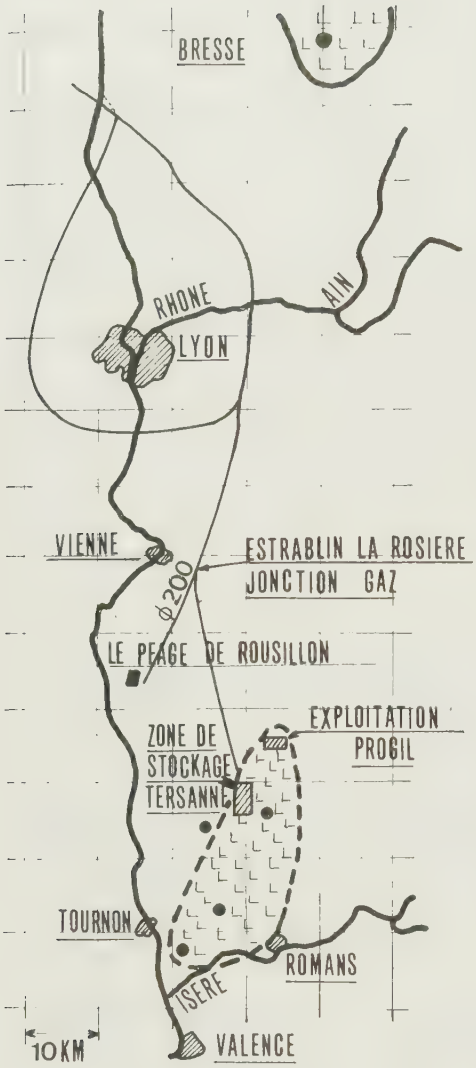


Figure 24

En ce qui concerne Gaz de France, il n'a pas été possible de mettre en évidence une structure aquifère apte au stockage dans la région Lyonnaise. Les bassins salifères de Bresse et du Valentinois offrent en revanche la possibilité de stockage en en cavité (fig.24)

Le site de Tersanne dans le Valentinois fut finalement retenu à cause de la proximité d'une entreprise exploitant le sel par lessivage, à des fins d'électrolyse qui permettait de se débarasser de la saumure.

c) Réalisation des cavités de stockage en couche de sel.

Le processus de lessivage conduit à développer une cavité dont le rayon final atteint plusieurs dizaines de mètres à partir d'un trou de forage de rayon décimétrique.

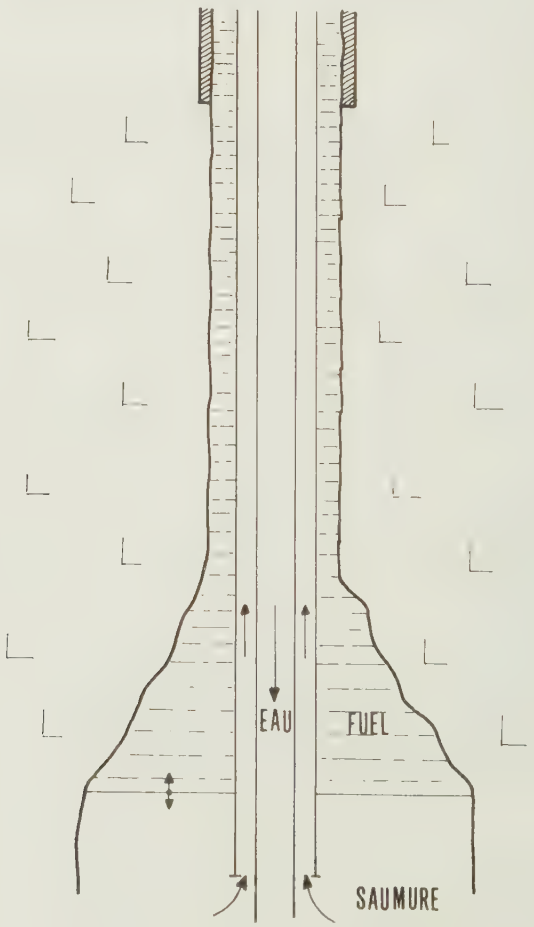


Figure 25

L'eau douce est injectée au fond par un tube central, la saumure produite remonte par l'espace annulaire intermédiaire (fig. 25)

Les positions successives du tuyau de remontée de saumure et du coussin d' inertes, (fuel) permettent de diriger l'évolution de la forme de la cavité.

GAZ DE FRANCE a développé un programme de calcul numérique permettant la simulation et le contrôle du développement des cavités lors du lessivage. Le modèle est recalé après chaque contrôle de forme par ultra-sons. [24]

d) mode d'exploitation des cavités de stockage de gaz.

Dans le cas du stockage d'hydrocarbures, on soutire ceux-ci en réinjectant le même volume de saumure, la cavité travaille alors à pression pratiquement constante.

Par contre, pour les stockages de gaz, celui-ci est repris par simple détente de la réserve en cavité, ce qui permet d'éviter d'avoir des réservoirs en surface, et surtout d'avoir à manipuler la saumure saturée, extrèmement corrosive, et présentant des risques de recristallisation.

e) Problèmes mécaniques posés par les cavités de Tersanne.

Avec le soutirage par simple détente la pression du gaz en cavité est susceptible de varier dans de grandes proportions. Si Pmax et Pmin sont respectivement les pressions maximale et minimale d'exploitation, les réserves effectivement disponibles sont fonction croissantes de la différence Pmax-Pmin. On a donc économiquement intérêt à avoir Pmax-Pmin le plus grand possible. Ce sont précisement les raisons mécaniques qui vont déterminer les pressions maximales et minimales admissibles.

Pour les cavités de Tersanne, le problème se présentait de la façon suivante : les deux cavités sont de révolution se trouvent à la même profondeur, ont sensiblement même forme générale fuselée et même capacité (environ 100.000 m^3)

Le toit de la couche de sel gemme est à 1400 m de profondeur. Il est surmonté d'un banc d'anhydrite de 4 m d'épaisseur, et d'une couche de sel de 10m au dessus de laquelle se trouvent des marnes (fig. 27)

Compte tenu de la profondeur, la pression géostatique est de l'ordre de 350 bars au niveau des cavités.

GAZ DE FRANCE avait prévu une pression maximum du gaz dans le stockage égale à 1,6 fois la pression hydrostatique existant à la profondeur où se trouve la cavité, c'est à dire Pmax=220 bars. C'est le souci de conserver la cimentation du tubage du puits en bon état qui à conduit à retenir pour ce coefficient une valeur inférieure à 1,8 ,valeur limite extrême admise pour la tenue à peu près certaine de cimentations de tubage réalisés soigneusement.

Pmax étant ainsi fixée par la technologie du tubage (les cavités auraient pu supporter des pressions plus fortes), il restait à déterminer la pression minimum Pmin d'exploitation. GAZ DE FRANCE souhaitait parvenir à une pression Pmin en cavité de 80 bars. Jusqu'à cette pression, on a en effet la possibilité d'envoyer le gaz sur le réseau par simple détente, sans recompression préalable.

Bien que les valeurs ainsi envisagées fussent tout à fait

comparables à celles qui étaient admises pour les cavités de Stockage en exploitation aux U.S.A. et au Canada, il importait cependant, d'étudier le comportement probable de la cavité dans ce domaine de pression, et de savoir en particulier si les zones perturbées au voisinage des parois ne risquaient pas de remonter jusqu'au banc d'anhydrite ou jusqu'au sabot de tubage, et induire ainsi dans le tubage des contraintes excessives.

En résumé, il s'agissait de déterminer à partir des propriétés mécaniques des terrains, les règles d'exploitation, (pression maxi, pression mini), garantissant une sécurité suffisante pour une utilisation des cavités de Tersanne sur une longue période. GAZ DE FRANCE souhaitait en outre disposer d'une analyse des contraintes et des déformations assez détaillée pour qu'il soit possible d'en tirer des leçons pour la réalisation de cavités futures (étude des zones les plus menacées, recherche de formes optimales au point de vue mécanique, etc...)

Une série d'essais effectués par l'I.F.P. et le Laboratoire de Mécanique des solides de l'Ecole Polytechnique sur les carottes prélevées en cours de forage, avait permis de connaître les caractéristiques mécaniques du sel, et de mettre en évidence pour ce matériau un comportement élasto-viscoplastique. [22] [23]

La forme des cavités était connue grâce à des mesures au sonar .

L'étude présentée ici fait suite à deux études de stabilité :

- la première [25] réalisée au Laboratoire de Mécanique des solides de l'Ecole Polytechnique se plaçait dans le cadre de l'élastoplasticité, mais pour des géométries simples (sphère ou cylindre).

- la seconde [26] effectuée au Centre d'Etudes de Mécanique des Roches de l'Ecole des Mines de Paris, utilisait la méthode des éléments finis, et permettait de suivre la forme réelle de la cavité, mais n'admettait pour le sel que la loi de comportement élastique.

Pour prendre en compte de façon réaliste à la fois la géométrie et les chargements complexes, et la rhéologie du sel, il s'est avéré indispensable de mettre au point une méthode permettant de traiter les problèmes élasto-plastiques par les éléments finis.

L'ensemble de l'étude a été effectuée (oct 70, nov 71) au Centre d'Etude de Mécanique des Roches de l'Ecole des Mines de Paris, et financée par GAZ DE FRANCE.

La première partie de l'étude (oct.70, Août 71) concernant la mise au point des méthodes de calcul a été exposée dans le chapitre précédent. [28]

L'application de ces méthodes au cas des cavités de Tersanne, (Sept.71, Nov.71) fait l'objet du présent chapitre. [29]

II - ETUDE DE LA CAVITE N° 1 DE GAZ DE FRANCE A TERSANNE.

a) Schéma rhéologique adopté :

D'après les expériences faites sur le sel, il apparaît que l'écrouissage, s'il existe, est très faible, et qu'on peut prendre la limite élastique comme valeur de la résistance ultime. Le sel peut donc être considéré comme élastoviscoplastique parfait.

Nous avons supposé, dans cette étude, que les vitesses de charge sont suffisamment faibles pour que l'influence de la viscosité (et donc du temps), soit négligée.

Nous avons donc considéré le sel, l'anhydrite et l'argile comme élastoplastiques parfaits, et obéissant au critère de Drücker , défini à partir des courbes intrinsèques de limite élastique [23] . Pour chaque matériau, les mesures faites donnent les caractéristiques suivantes :

Sel :	E= 50.000 bars	ν= 0,36	C=30 bars	Tgϕ = 0,30
Anhydrite	E=300.000 bars	ν= 0,25	C=90 bars	Tgϕ = 1.22
Marnes :	E= 50.000 bars	ν= 0,25	C=120 bars	Tgϕ = 0.22

Les mesures de dispersion effectuées ont montré que les différentes couches sont très homogènes au point de vue des propriétés mécaniques.

D'autre part, les données géologiques générales, les sondages et l'évolution de la forme des cavités semblent exclure l'existence de failles à grande échelle.

Nous avons donc pu raisonnablement considérer le milieu comme continu, et formé de couches homogènes de différents matériaux.

L'étude de TERSANNE a donné lieu à deux séries de calculs: pour la première série, nous n'avions pas encore la possibilité qu'offre la version actuelle de PLASTAX , d'avoir un potentiel plastique distinct du critère de plasticité. Nous avions donc pris les critères de plasticité comme potentiels plastiques . En fait , pour ces potentiels , le choix de $J_2^{1/2}$ aurait été préférable , puisque expérimentalement les matériaux étudiés ne semblent pas présenter de variations plastiques de volume . On avait pu néanmoins justifier à postériori la validité des résultats en observant que le sel, seul matériau présentant dans le cas considéré des déformations plastiques , possède un angle de frottement interne faible .La solution obtenue était donc vraisemblablement assez proche de celle qu'on aurait trouvé en adoptant $J_2^{1/2}$ pour potentiel plastique .

Ce dernier point a été par la suite entièrement confirmé par la deuxième série de calculs effectuée avec $J_2^{1/2}$ comme potentiel plastique .

b) Maillage employé (fig. 27)

Il suit exactement le pourtour de la cavité tel qu'il a été relevé au sonar.(420 points, 754 éléments). Sur l'axe de symétrie, on impose des déplacements horizontaux nuls. Sur le pourtour de la cavité, on impose une condition de pression. Sur le reste de la frontière du maillage, on impose l'état de pression qui régnait avant creusement de la cavité.

De plus, on a imposé un déplacement vertical nul en un point de l'axe, faute de quoi le modèle pourrait avoir des déplacements verticaux arbitraires.

c) Etapes du calcul effectué avec le critère comme potentiel plastique .

Etat initial.

C'est l'état du massif avant creusement de la cavité. Les déplacements sont nuls en tout point. Les contraintes, dans chaque élément, sont fixées à :

$$\sigma_r = \sigma_\theta = \sigma_z = P(z_G) \qquad \tau_{rz} = 0.$$

$P(Z_G)$ est la pression lithostatique au niveau du centre de gravité de l'élément. D'après les informations recueillies sur les fracturations hydrauliques dans la même couche , et le comportement des carottes après remontée au jour, cette répartition de contraintes semble la plus vraisemblable.

Les incréments successifs.

La figure 26 donne le numéro NINCR de l'incrément, la pression P en bars du gaz dans la cavité, le nombre d'itérations NC nécessaires pour converger et le temps CP en secondes de mémoire centrale de CDC 6600.

(Les forces de rééquilibrage étaient considérées comme négligeables lorsqu'elles devenaient inférieures en tout point à 10^4 Kgf , ce qui représente environ le millième des plus petites forces nodales résultant des charges réellement imposées).

NINCR	P en bars	N C	C P en secondes
1	220	3	14
2	200	20	34
3	180	30	51
3bis	180	3	10
4	140	51	93
5	120	70	130
6	100	85	153
7	80	110	202
8	60	150	281
		TOTAL	969

Figure 26

La durée totale de l'ensemble des passages a donc été de 16 mn 40 S. (CDC 6600).

REMARQUE : Pour cette résolution, l'algorithme de base a été utilisé sans dispositif d'accélération.

d) Résultats (les critères de plasticité étant potentiels plastiques)

Etude de la zone plastique.

Le premier élément plastique apparaît à 221 bars. De 220 bars à 200 bars, apparaissent des zones plastiques peu étendues et localisées aux points anguleux de la surface de la cavité, où l'on observe des concentrations de contrainte.

De 200 bars à 180 bars, les îlots plastiques se rejoignent et forment une zone plastique continue qui suit le pourtour de la cavité (Fig. 28).

De 180 bars à 60 bars, la zone plastique augmente régulièrement d'épaisseur surtout dans la partie renflée de la cavité : (Fig. 28 - 29).

A 60 bars, l'épaisseur maximale de la zone plastique est de 18m, à 80 bars, elle est de 13 m.

On peut rapprocher ces résultats de ceux de l'étude de J.SALFNÇON [21], [25]

A 80 bars, dans le cas de la sphère de 25 m de rayon, dans un massif de sel infini où règne une pression initiale de 350 bars, la zone plastique a une épaisseur de 8,70 m. Dans le cas du cylindre de même rayon, elle est de 25,50 m. d'épaisseur.

L'épaisseur de la zone plastique dans le haut de la cavité reste faible, et varie peu lors de la baisse de pression de gaz.

La zone plastique reste très loin du banc d'anhydrite et du sabot de tubage. (distance minimum à 60 bars : 8 m) (fig. 29).

Variations relatives du volume de la cavité.

A partir de 220 bars, la courbe $\frac{Vo-V}{Vo}$ commence à s'éloigner de ce qu'on obtiendrait si le matériau restait élastique. (fig. 30)

Nous avons porté également sur la figure 30 , les $\frac{\Delta V}{V}$ obtenus par SALENÇON pour une cavité sphérique de 25 m de rayon, dans un massif de sel infini où règne une pression initiale de 350 bars, et pour une cavité cylindrique de même rayon.

On peut voir , dans ce cas précis , que la courbe des variations relatives du volume de la cavité de Tersanne est très voisine de la courbe $\frac{\Delta V}{V}$ de la sphère .

Répartition des Contraintes.

Nous avons porté sur la figure 35 la répartition spatiale de la différence entre les contraintes principales maximale et minimale. La répartition des contraintes suivant les trois directions AA',BB' et CC' a été portée sur les figures 32, 33 et 34

Suivant AA'(fig.27-32). Nous avons porté sur la figure 32, les résultats bruts de PLASTAX (contraintes en escalier) et les courbes lissées que l'on peut en déduire.

Nous pouvons voir que σ_r, σ_θ, σ_z, sont contraintes principales et que l'allure des contraintes est très semblable à celle que l'on observe au voisinage d'une cavité sphérique.

Suivant BB' (fig. 27-33)

Pour rendre les résultats plus lisibles, nous n'avons porté sur la figure 33 , que les courbes lissées.

On observe des contraintes très importantes au voisinage immédiat de la cavité :

σ_θ = - 1462 bars σ_r = - 1039 bars σ_z = - 1030 bars

τ_{rz} = 265,8 bars.

Le matériau y travaille cependant essentiellement en compression. Nous avons en effet :

$^1/_3 \quad (n_1 + n_2 + n_3)$ =-1177,6 bars.

s_1 = 408,1 bars.

s_2 =-284,4 bars

s_3 =-127,7 bars.

Où, n_1, n_2, n_3 sont les contraintes principales au point B ; s_1, s_2, s_3, les composantes du déviateur et où les compressions sont comptées négativement.

A cause de la forme en ogive, la pertubation de l'état de contrainte en direction du banc d'anhydrite est trés concentrée au voisinage immédiat de la cavité : au niveau du sabot de tubage, les contraintes ont pratiquement la valeur qu'elles avaient avant creusement. (fig. 33)

Le modèle met en évidence la perturbation apportée à σ_θ et σ_r au passage du banc d'anhydrite.

Suivant CC' (fig. 27-34)

Les contraintes radiales et tangentielles sont égales, on reste en effet en permanence au voisinage immédiat de l'axe de symétrie.

Comme au sommet de la cavité, la perturbation de l'état de contrainte s'amortit trés vite ; au voisinage immédiat de la cavité, on a :

1/3 $(n_1 + n_2 + n_3)$ = - 1030,9 bars

s_1 = 364,4 bars

s_2 = - 241,1 bars

s_3 = - 123,5 bars

Déformation du massif au voisinage immédiat du Tubing.

Nous avons porté figure 31 les déformations du massif le long du Tubing.

Il apparaît que jusqu'à 60 bars ces déformations restent inférieures à 2×10^{-4} , ce qui est aisément supportable par le casing.

e) Etapes du calcul effectué avec $J_2^{1/2}$ comme potentiel plastique .

Les forces de rééquilibrage étaient considérées comme négligeables lorsqu'elles devenaient inférieures en tout point à 10^4 Kgf .

En partant du même état initial que dans le calcul précédent, nous avons effectué les incréments suivants :

NINCR	P en bars	NC	CP en secondes
1	200	11	26
2	140	23	42
3	100	37	70
4	80	48	90
		TOTAL	228

La comparaison de ce tableau avec celui de la figure 26 montre que , de façon assez inattendue , le processus a ici convergé beaucoup plus vite que dans le calcul précédent .

f) Résultats($J_2^{1/2}$ étant potentiel plastique)

La répartition des zones plastiques est rigoureusement identique à la répartition obtenue par le calcul précédent .

Les contraintes sont pratiquement identiques à celles du calcul précédent .

Seules les variations relatives de volume de la cavité s'écartent notablement de ce qui était obtenu par le calcul précédent(fig.30) .

Comme on pouvait s'y attendre , les variations relatives de volume sont moins importantes quand on prend $J_2^{1/2}$ comme potentiel plastique .

CONCLUSION

-:-:-:-:-:-

Pour la cavité N° 1 de Tersanne, et dans le domaine de pression d'exploitation envisagé (220 bars - 80 bars) nous pouvons, compte tenu des hypothèses faites, présenter les conclusions suivantes :

- la cavité est stable
- les perturbations apportées au banc d'anhydrite, au sabot de tubage, au tubing lui-même par les variations de pression en cavité sont très faibles.
- l'extension de la zone plastique est trés réduite vers le haut en direction du tubing, ce que l'on souhaitait ; elle est importante dans la zone de rayon maximal, ce qui n'est pas gênant.
- il semble qu'on puisse descendre la pression minimum légèrement plus bas que 80 bars, (nous avons étudié la cavité jusqu'à 60 bars); mais que l'accroissement de réserve de gaz ainsi obtenu ne justifie pas une installation de recompression en surface pour l'envoi sur le réseau.
  Une pression minimum de 80 bars semble ainsi donner une bonne marge de sécurité.

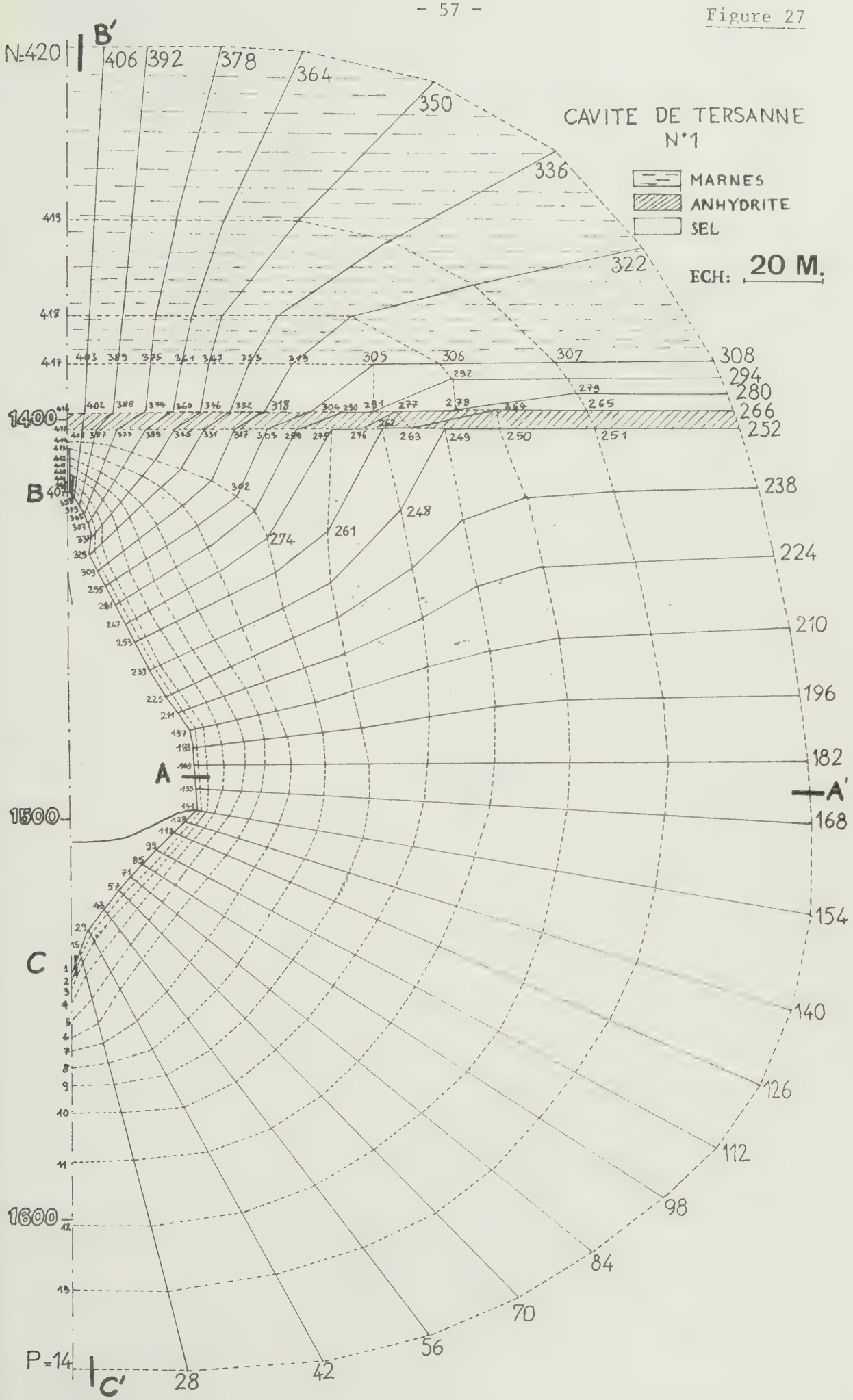
Nous pouvons d'autre part tirer de cette étude des leçons plus générales susceptibles d'être utiles pour la réalisation d'autre cavités :

Gaz de France avait choisi de donner une forme conique à la partie supérieure de ses cavités car cela semblait devoir présenter plus de garanties de stabilité. De fait, il s'avère que cette forme générale en fuseau présente des qualités très intéressantes :

Si l'extension de la zone plastique est plus grande que dans le cas de la sphère dans la zone de rayon maximum, ce qui n'est pas gênant du tout, on observe par contre vers le haut de la cavité une diminution spectaculaire de la zone plastique et même de la zone où les contraintes varient sensiblement lorsque la cavité "respire".

Si la sphère est la meilleure forme du point de vue mécanique pour des cavités en milieu homogène infini où règne une pression initiale constante, il semble que la forme fuselée soit préférable lorsque l'on désire implanter les cavités dans une couche horizontale d'épaisseur finie et limiter les perturbations au toît de cette couche.

Figure 27


CAVITE DE TERSANNE
N°1
MARNES
ANHYDRITE
SEL
ECH: 20 M.
N=420
P=14
B'
C'
A
A'
B
C
1400
1500
1600
406
392
378
364
350
336
322
308
294
280
266
252
238
224
210
196
182
168
154
140
126
112
98
84
70
56
42
28

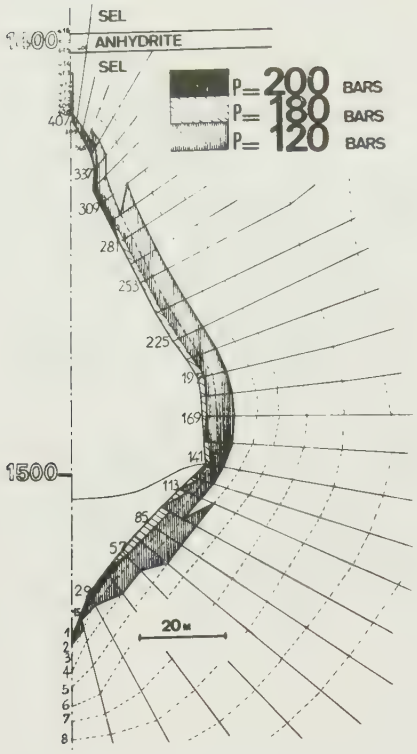


Figure 28

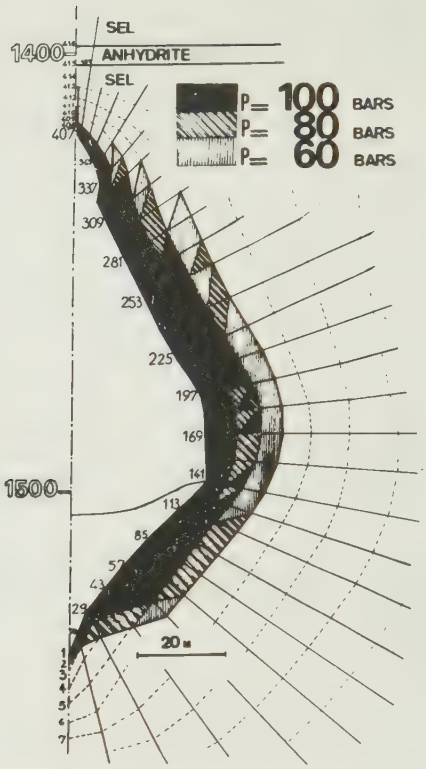


Figure 29

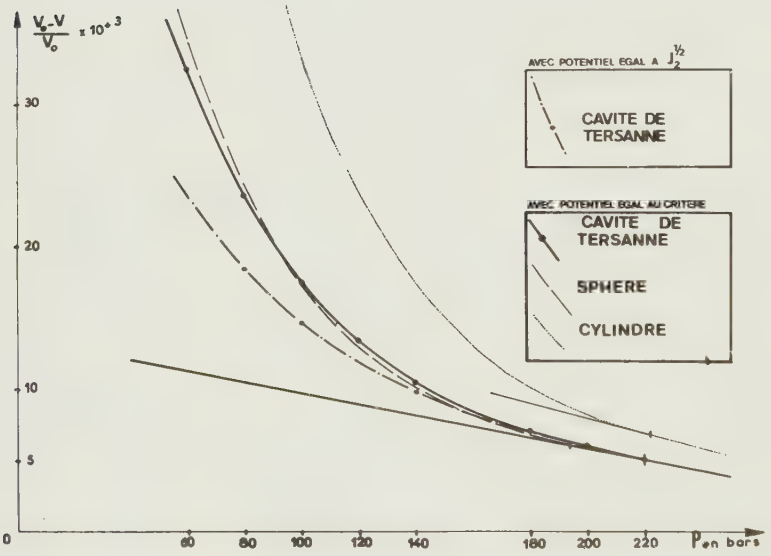


Figure 30

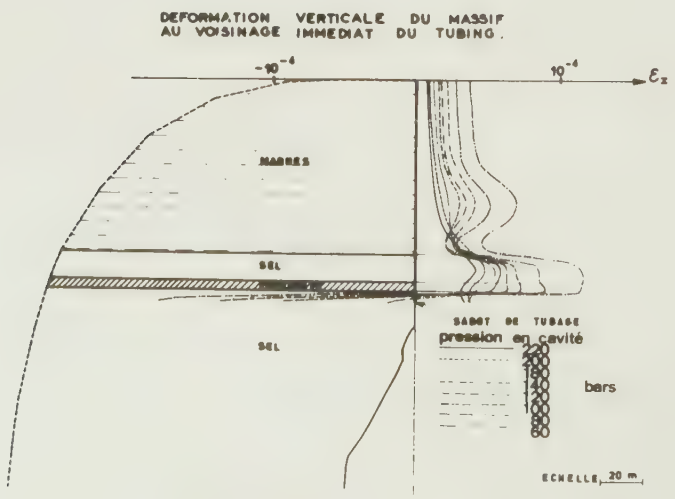


Figure 31

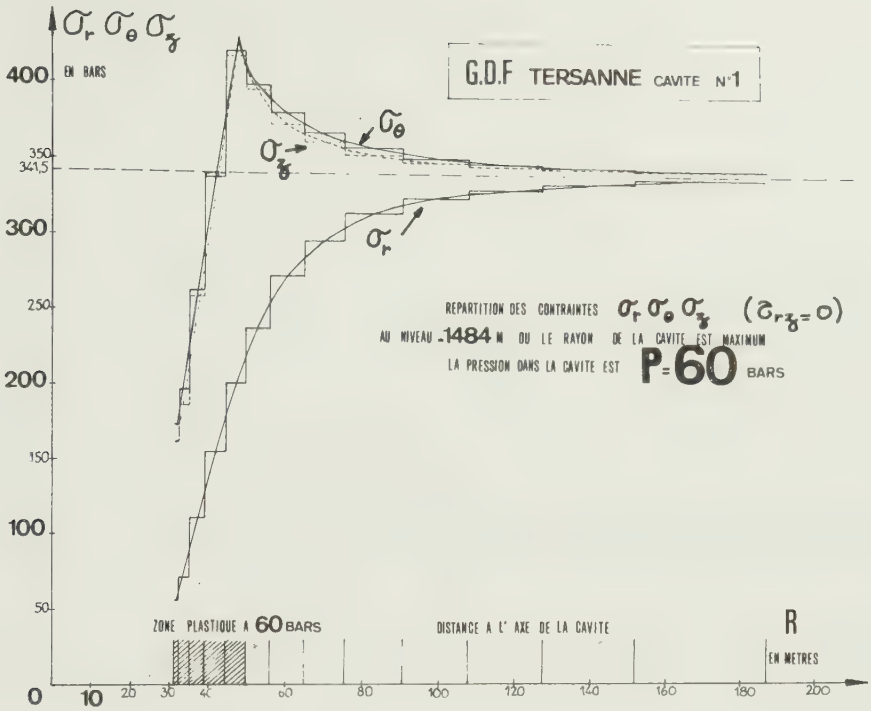


Figure 32

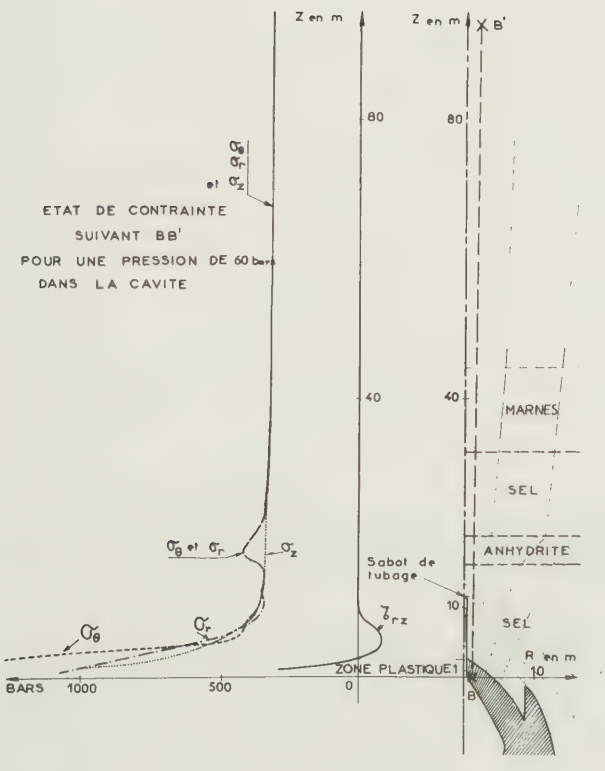


Figure 33

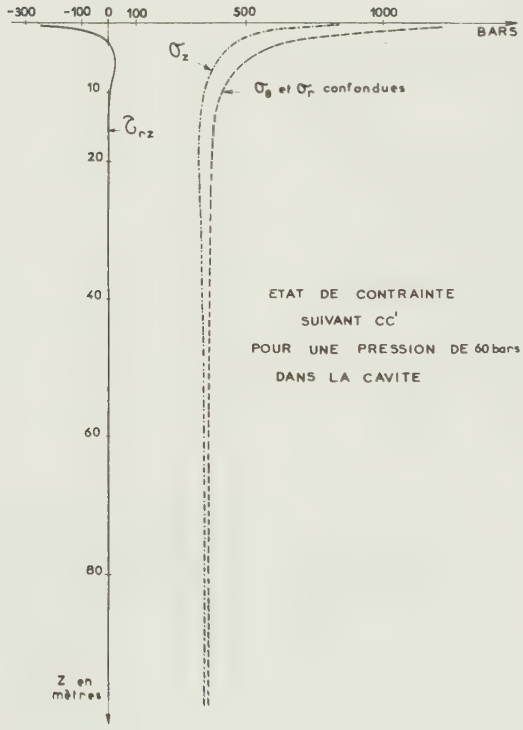
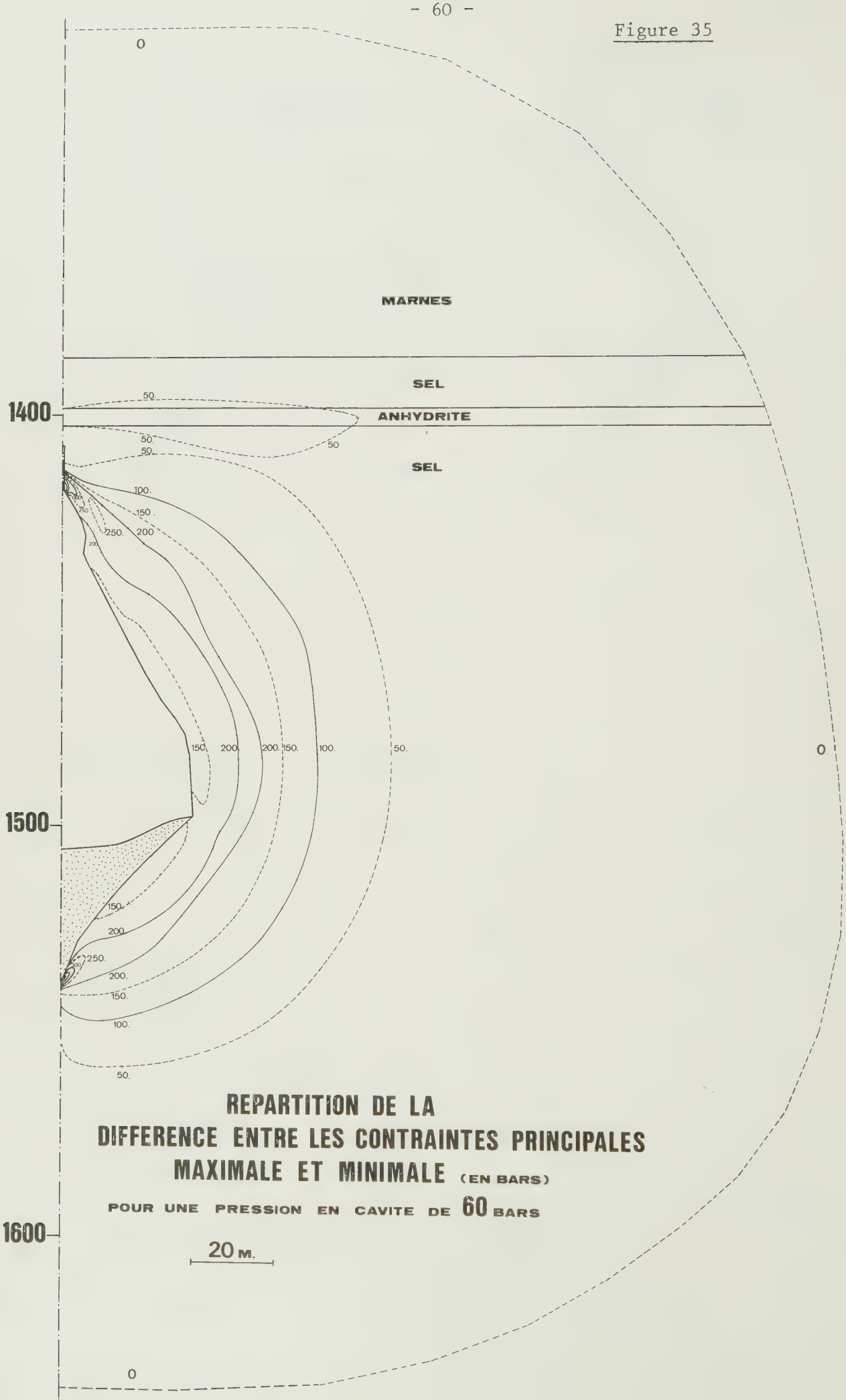


Figure 34

Figure 35


0
MARNES
SEL
50.
1400
ANHYDRITE
50.
50.
50
SEL
100.
150.
250.
200
200
150.
200.
200.
150.
100.
50.
0
1500
150.
200.
250.
200.
150.
100.
50.
REPARTITION DE LA
DIFFERENCE ENTRE LES CONTRAINTES PRINCIPALES
MAXIMALE ET MINIMALE (EN BARS)
POUR UNE PRESSION EN CAVITE DE 60 BARS
1600
20 M.
0

CONCLUSION GENERALE

Si nous résumons les différentes conclusions intermédiaires auxquelles nous sommes parvenus, nous pouvons dégager les points suivants :

- Les Méthodes numériques que nous avons utilisées et les programmes Fortran que nous avons écrits pour la résolution par la méthode des éléments finis des problèmes viscoélastiques et élastoplastiques fonctionnent parfaitement.

- Pour tous les cas où, disposant de solutions analytiques nous avions la possibilité de tester l'aptitude des programmes à bien représenter le schéma théorique de comportement, nous avons retrouvé numériquement avec une grande précision les résultats calculés analytiquement.

- Notre but n'étant pas, en fin de compte, la résolution de cas théoriques mais la mise au point de procédés d'étude efficaces de problèmes concrets, nous nous sommes efforcés de choisir des schémas théoriques de comportement rhéologiques aptes à représenter valablement les matériaux réels en général et les roches en particulier. (Schéma M - finis pour les matériaux viscoélastiques - critère de Drücker et potentiel plastique distinct du critère pour les matériaux élastoplastiques). Nous avons d'autre part mis au point des méthodes pratiques pour ajuster les schémas rhéologiques théoriques à la réalité. Dans le même souci d'efficacité, nous avons écrit les programmes de façon qu'ils soient souples et économiques à l'emploi, faciles à mettre en oeuvre, même par des utilisateurs non spécialisés en informatique.

- Sans revenir en détail sur les possibilités de chacun des programmes, nous pouvons cependant rappeler qu'ils permettent de prendre en compte de façon rigoureuse :

  - les propriétés mécaniques des différents matériaux et leur mode de comportement (viscoélastique ou élastoplastique).
  - la répartition spatiale des différents matériaux dans le milieu étudié
  - la forme géométrique de l'ouvrage que l'on veut réaliser
  - les chargements les plus complexes.

  Ils fournissent une analyse détaillée des champs de contrainte et de déplacement et, dans le cas de l'élastoplasticité l'évolution des zones plastiques et le travail plastique dépensé par unité de volume.

  La méthode des éléments finis et son extension aux cas de la viscoélasticité et de l'élastoplasticité permettent ainsi de s'affranchir d'hypothèses simplificatrices souvent hasardeuses concernant la rhéologie des matériaux ou la géométrie du problème.

Nous espérons avoir apporté par cette étude une modeste contribution aux efforts tendant à combler le fossé qui sépare la connaissance des lois générales de la Mécanique de leur application, en élargissant le domaine des problèmes concrets effectivement accessibles au calcul.

ANNEXE 1

Représentation approchée des solides viscoélastiques linéaires.

1) Position du problème.

Etant donné un solide viscoélastique linéaire soumis à un chargement Q_i i=1..n, les déplacements associés observables étant q_i i=1..n, dont la matrice de retard $f_{ij}(t)$ a pour transformée de Carson $f_{ij}(P)$, les résultats dus à BIOT [10], MANDEL [11], et BLAND [12] montrent que ces matrices sont symétriques et que $f^*_{ij}(P)$ est susceptible d'une représentation spectrale particulière.

$$f^*_{ij}(P) = J^o_{ij} + \int_o^{+\infty} \phi_{ij}(\lambda) \frac{\lambda}{p+\lambda} d\lambda$$

$$\subset f_{ij}(t) = J^o_{ij} + \int_o^{+\infty} \phi_{ij}(\lambda) (1 - e^{-\lambda t}) d\lambda$$

avec les propriétés suivantes : P1: $f_{ij}(t)$ est symétrique et associée à une forme quadratique définie positive.

P2: J^o_{ij} est une matrice symétrique associée à une forme quadratique non négative.

Les ϕ_{ij} sont des distributions vérifiant :

$$\phi_{ij} = \phi_{ij} \quad \text{et} \quad \forall \vec{x} \neq \vec{0}, \ \phi_{ij} \ x_i \ y_j > 0$$

P3: Les pôles de $f_{ij}(P)$ sont strictement négatifs.

Appelant schéma M.fini, le groupement en série d'un ressort et d'un nombre fini de modèles de Kelvin Voigt, nous allons démontrer la propriété P suivante :

Pour tout solide viscoélastique linéaire, et en appelant $|D|$ l'erreur faite en substituant un schéma M_fini au matériau réel. Nous avons :

$$\forall B, \forall \varepsilon > 0, \exists M.fini, \sup_{t \in [0,B]} |D| < \varepsilon$$

Nous effectuerons la démonstration en deux temps:

- Nous montrerons d'abord qu'il est possible de limiter le domaine d'intégration $[0,+\infty[$ à un intervalle $[0,A]$

- Nous opérerons alors une discrétisation qui fera apparaître un schéma M_fini.

Nous montrerons que ces deux opérations peuvent être ef-

fectuées de manière à introduire une erreur aussi petite que l'on veut.

2) Démonstration de quelques résultats intermédiaires.

P4 Convergence de $\int_0^{+\infty} \phi_{ij}(\lambda)\, d\lambda \quad \forall\, ij$

D'aprés la propriété P3 les pôles de f^*_{ij} (P) sont réels et strictement négatifs. f^*_{ij} (P) est défini pour tous les p à partie réelle positive, ou nulle, et en particulier pour p = 0 : or $f^*_{ij}(0) = \int_0^{+\infty} \phi_{ij}(\lambda)\, d\lambda$

d'où la propriété P4.

P5 Convergence de $\int_0^{+\infty} |\phi ij(\lambda)|\, d\lambda \quad \forall i,j \quad i,j \in \{1..n\}$

Posons $\Phi(x,x) = \phi_{ij}\, x_i\, x_j$ Nous avons donc :

$\Phi(x,x) \geq 0 \quad \forall \vec{x} \neq \vec{0}$

Il existe donc des formes linéaires réelles dont Φ soit la somme des carrés ; on peut donc écrire :

$$\Phi(x,x) = \sum_{l=1}^{p} \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^l\, x^i\right)^2 \qquad (p \leq n)$$

Les deux formes bilinéaires de matrices respectives (ϕ_{ij}) et (ϕ'_{ij}), où $\phi'_{ij} = \sum_{l=1}^{p} \alpha_j^l\, \alpha_j^l$, admettent la même forme quadratique associée. Comme de plus (ϕ_{ij}) et (ϕ'_{ij}) sont symétriques, elles coïncident. Nous avons donc :

$$\phi ij = \sum_{l=1}^{p} \alpha_j^l\, \alpha_j^l \qquad (p \leq n) \qquad \forall i\ \forall j \in \{1 \ldots n\}$$

en particulier : $\int_0^{+\infty} \phi_{ii}(\lambda)\, d\lambda = \int_0^{+\infty} \sum_{l=1}^{p} \left(\alpha_i^l(\lambda)\right)^2 d\lambda = \sum_{l=1}^{p} \int_0^{+\infty} \left(\alpha_i^l(\lambda)\right)^2 d\lambda$

Grâce à la propriété P4, nous pouvons écrire :

$\int_0^{+\infty} \left(\alpha_i^l(\lambda)\right)^2 d\lambda < +\infty \qquad \forall i, \forall l$

Nous avons d'autre part : $2\,|\alpha_i^l\, \alpha_j^l| \leq (\alpha_i^l)^2 + (\alpha_j^l)^2$

Donc : $\forall i\ \forall j \quad \int_0^{+\infty} |\alpha_i^l\, \alpha_j^l|\, d\lambda < +\infty$

Par suite : $\sum_{l=1}^{p} \int_0^{+\infty} |\alpha_i^l\, \alpha_j^l|\, d\lambda < +\infty$

Or nous pouvons écrire :

$$\int_0^{+\infty} |\phi ij\ (\lambda)|d\lambda \leq \int_0^{+\infty} \sum_{I=1}^{p} |\alpha_i^1\ \alpha_j^1|\, d\lambda \leq \sum_{I=1}^{p} \int_0^{+\infty} |\alpha_i^1\ \alpha_j^1|\, d\lambda < +\infty$$

La propriété P5 est donc démontrée.

✱ P6. Convergence uniforme de $\int_0^{+\infty} \phi_{ij}(\lambda)\ (1-e^{-\lambda t})\ d\lambda$

D'après la propriété P5, nous avons :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists A_1,\ A > A_1 \Longrightarrow \forall i\ \forall j\ \int_A^{+\infty} |\ \phi_{ij}(\lambda)\ |d\lambda < \varepsilon/2$$

or, nous pouvons écrire, quel que soit t :

$$\left| \int_A^{+\infty} \phi_{ij}\ (\lambda)\ (1 - e^{-\lambda t})\ d\lambda \right| \leq \int_A^{+\infty} |\ \phi_{ij}\ (\lambda)\ |\ (1 - e^{-\lambda\ t})d\lambda \leq \int_A^{+\infty} |\ \phi_{ij}(\lambda)|d\lambda$$

Nous avons donc démontré la propriété P6. Si nous posons : $\int_0^A \phi_{ij}(\lambda)\ (1-e^{-\lambda t})\ d\lambda = Y_{ij}\ (A,t)$

nous pouvons écrire :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists A_1,\ A > A_1 \Longrightarrow \forall i\ \forall j\quad \underset{t\ [0,+\infty[}{SUP}\ (|f_{ij}(t) - Y_{ij}(A,t) - J_{ij}^o|) < \varepsilon/2 \qquad (1)$$

3) Démonstration de la propriété P.

Posons : $M(A) = \underset{i,j \in \{1\ \ldots n\}}{Max}\ \left(\int_0^A |\phi_{ij}(\lambda)|\ d\lambda\right)$

Grâce à P5, on sait que M existe.

✱-Supposons : $M(A)=0\ \forall A$

Nous avons : $|Y_{ij}\ (A,t)| \leq M(A)$

donc : $Y_{ij}\ (A,t) = 0$

la formule (1) devient alors :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists A_1,\ A > A_1 \Longrightarrow \forall i, \forall j,\ SUP(\ f_{ij}(t) - J_{ij}^o|) < \frac{\varepsilon}{2}$$
$$t \in [0,+\infty[$$

Dans ce cas, on voit que la matrice de retard f_{ij} (t) se réduit (à $\varepsilon/2$ près) à la matrice d'élasticité instantanée (J_{ij}^o). La propriété P est alors bien vérifiée: le schéma M-fini qui répond au problème est alors un "ressort" dont la matrice d'élasticité est égale à la matrice (J_{ij}^o) d'élasticité instantanée du solide viscoélastique.

✱-Cas où M(A) est différent de zéro. Posons :

$$S_{ij}(A,m,t) = \sum_{k=0}^{m-1} J_{ij}^{(k+1)}\ (1-e^{-(k+1)\frac{A}{m}t})$$

avec : $J_{ij}^{(k+1)} = \int_{k\frac{A}{m}}^{(k+1)\frac{A}{m}} \phi_{ij}(\lambda)\ d\lambda \qquad k,m \in \mathbb{N}\ ,\ A \in]0,+\infty[$

Calculons : $|Y_{ij}(A,t) - S_{ij}(A,m,t)| = |\Delta_{ij}(A,m,t)|$

$$|\Delta_{ij}(A,m,t)| = \left| \sum_{k=0}^{m-1} \int_{k\frac{A}{m}}^{(k+1)\frac{A}{m}} \phi_{ij}(\lambda)\,(1-e^{-\lambda t})\,d\lambda - J_{ij}^{(k+1)}\,(1-e^{-(k+1)\frac{A}{m}t}) \right|$$

$$|\Delta_{ij}(A,m,t)| \leq \sum_{k=0}^{m-1} \left| \int_{k\frac{A}{m}}^{(k+1)\frac{A}{m}} \phi_{ij}(\lambda)\,(e^{-(k+1)\frac{A}{m}t} - e^{-\lambda t})\,d\lambda \right|$$

$$|\Delta_{ij}(A,m,t)| \leq \sum_{k=0}^{m-1} d_{ij}^{(k+1)}(A,m,t) \qquad \forall t \in [0, +\infty[$$

avec : $d_{ij}^{(k+1)}(A,m,t) = \int_{k\frac{A}{m}}^{(k+1)\frac{A}{m}} |\phi_{ij}(\lambda)|\, e^{-(k+1)\frac{A}{m}t} - e^{-\lambda t}|\, d\lambda$

La fonction $e^{-\lambda t}$ étant continue en λ, uniformément par rapport à t, sur tout intervalle fermé borné $[0,B]$ nous avons :

$$\forall A, \forall B, > 0 \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \alpha(A) : |\lambda - \lambda'| < \alpha(A) \Longrightarrow \sup_{t\,[0,B]} (|e^{-\lambda t} - e^{-\lambda' t}|) < \frac{\varepsilon}{2\,M(A)}$$

Nous avons évidemment d'autre part :

$$\forall A, \ \forall \alpha(A), \exists m_1 \in \mathbb{N} : m > m_1 \Longrightarrow \frac{A}{m} < \alpha(A)$$

Enfin, pour chaque $d_{ij}^{(k+1)}$, λ varie entre $k\frac{A}{m}$ et $(k+1)\frac{A}{m}$

Nous avons donc :

$$\forall k, \lambda \in \left[\frac{k\,A}{m}, \frac{(k+1)\,A}{m}\right] \Longrightarrow \left|\frac{(k+1)\,A}{m} - \lambda\right| < \frac{A}{m}$$

Nous pouvons alors écrire :

$$\forall A, \forall B, \forall \varepsilon > 0, \forall k \in \mathbb{N}, \exists m_1 \in \mathbb{N} : m > m_1 \text{ et } \lambda \in \left[\frac{k\,A}{m}, \frac{(k+1)A}{m}\right]$$

$$\Longrightarrow \sup_{t\in[0,B]} (|e^{-\frac{(k+1)A}{m}t} - e^{-\lambda t}|) < \frac{\varepsilon}{2\,M(A)}$$

Pour chaque $d_{ij}^{(k+1)}$ nous avons donc :

$$\forall B, \ \forall A \in]0,+\infty[, \ \forall \varepsilon > 0, \exists m_1, \ m > m_1 \Longrightarrow \sup_{t\in[0,B]} (d_{ij}^{(k+1)}(A,m,t)) < \frac{\varepsilon}{2\,M(A)} \int_{k\frac{A}{m}}^{(k+1)\frac{A}{m}} |\phi_{ij}(\lambda)|\,d\lambda$$

Or, pour $|\Delta_{ij}|$ nous avons:

$$\sup_{t\in[0,B]} |\Delta_{ij}(A,m,t)| \leq \sup_{t\in[0,B]} \left(\sum_{k=0}^{m-1} d_{ij}^{(k+1)}(A,m,t)\right)$$

$$\leq \sum_{k=0}^{m-1} \sup_{t\in[0,B]} (d_{ij}^{(k+1)}(A,m,t))$$

$$< \frac{\varepsilon}{2\,M(A)} \int_0^A |\phi_{ij}(\lambda)|\,d\lambda$$

or, $\forall i, \forall j$, $\int_0^A |\phi_{ij}(\lambda)|\,d\lambda \leq M(A)$

Nous avons donc finalement :

$$\forall B>0, \forall A>0, \forall \varepsilon>0, \exists m_1 : m > m_1 \Longrightarrow \max_{i,j\in\{1..n\}} \left(\sup_{t\in[0,B]} |Y_{ij}(A,t) - S_{ij}(A,m,t)|\right) < \varepsilon/2 \qquad (2)$$

En rapprochant les expressions (1) et (2) , nous pouvons écrire :

$$\forall B>0, \forall \varepsilon>0, \exists A1>0, \exists m_1 \in \mathbb{N} :$$

$$A>A1,\ m>m_1 \Longrightarrow \forall i, \forall j, i, j \in \{1..n\}, \sup_{t \in [0,B]} \left(\left| f_{ij}(t) - S_{ij}(A,m,t) - J^{o}_{ij} \right| \right) < \varepsilon \qquad (3)$$

REMARQUE :

$$S_{ij}(A,m,t) + J^{o}_{ij} = \sum_{k=0}^{m-1} J_{ij}^{(k+1)} \left(1 - e^{-(k+1)\frac{A}{m} t} \right) + J^{o}_{ij}$$

avec :

$$J_{ij}^{(k+1)} = \int_{k\frac{A}{m}}^{(k+1)\frac{A}{m}} \phi_{ij}(\lambda)\, d\lambda \qquad (4)$$

On remarque que les $J_{ij}^{(k+1)}$ sont des matrices symétriques associées à des formes quadratiques non négatives, et qu'elles ne dépendent pas de t.

On remarque que la formule (4) définit la matrice de retard d'un schéma M.fini comportant m modèles de Kelvin.

La formule (3) exprime le fait qu'on a trouvé une famille de schéma M.finis dont les matrices de retard convergent (en A et m) uniformément par rapport à t vers la matrice de retard du solide viscoélastique envisagé.

En prenant A et m correctement ($A>A_1$, $m>m_1$) on a alors bien un schéma M.fini qui répond au problème.

La propriété P est donc démontrée.

ANNEXE 2

-:-:-:-:-

Calcul de la matrice d'élastoplasticité.

Nous voulons éliminer χ entre les expressions :

$$\delta\{\varepsilon\} = [T]^{-1}\delta\{\sigma\} + \{\frac{\partial P}{\partial\{\sigma\}}\}\ \chi \qquad (3,5)$$

$$\{\frac{\partial Cr}{\partial\{\sigma\}}\}^t\ \delta\{\sigma\} = \chi H \qquad (3,6)$$

D'après (3,5), nous pouvons écrire :

$$[T]\ \{\frac{\partial P}{\partial\{\sigma\}}\}\ \chi = [T]\ \delta\{\varepsilon\} - \delta\{\sigma\} \qquad (1)$$

Multiplions à gauche les deux membres de (3,6) par $[T]\ \{\frac{\partial P}{\partial\{\sigma\}}\}$

En tenant compte de (1), nous obtenons :

$$[T]\{\frac{\partial P}{\partial\{\sigma\}}\}\ \{\frac{\partial Cr}{\partial\sigma}\}^t\ \delta\{\sigma\} = H([T]\ \delta\{\varepsilon\} - \delta\{\sigma\}) \qquad (2)$$

Multiplions à gauche les deux membres de (3,5) par :

$[T]\ \{\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial\{\sigma\}}\}\ \{\frac{\partial Cr}{\partial\{\sigma\}}\}^t\ [T]$. Nous obtenons :

$$[T]\ \{\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial\{\sigma\}}\}\ \{\frac{\partial Cr}{\partial\{\sigma\}}\}^t\ \delta\{\sigma\} = [T]\ \{\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial\{\sigma\}}\}\ \{\frac{\partial Cr}{\partial\{\sigma\}}\}^t\ [T]\ \delta\{\varepsilon\} - \beta \qquad (3)$$

avec $\beta = [T]\ \{\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial\{\sigma\}}\}\ \{\frac{\partial Cr}{\partial\{\sigma\}}\}^t\ [T]\ \{\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial\{\sigma\}}\}\ \chi$

posons $A = \{\frac{\partial Cr}{\partial\{\sigma\}}\}^t\ [T]\ \{\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial\{\sigma\}}\}$ A est évidemment un scalaire.

Compte tenu de (1) β peut alors s'écrire :

$$\beta = ([T]\ \delta\{\varepsilon\} - \delta\{\sigma\})\ A \qquad (4)$$

En égalant les expressions (2) et (3) et en tenant compte de (4) nous obtenons :

$$\left((H + A)[T] - [T]\ \{\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial\{\sigma\}}\}\ \{\frac{\partial Cr}{\partial\{\sigma\}}\}^t\ [T]\right)\delta\{\varepsilon\} = (H + A)\ \delta\{\sigma\} \qquad (5)$$

Posons $M = H + A$. Supposons M différent de zéro (ce point est discuté dans le paragraphe : "Validité physique du potentiel plastique choisi")

En divisant les deux membres de (5) par M nous obtenons :

$$\delta \{\sigma\} = \left[Tep\right] \delta \{\varepsilon\} \qquad (3.7)$$

avec $$\left[Tep\right] = \left[T\right] - \left[T\right] \{\frac{\partial p}{\partial \{\sigma\}}\} \{\frac{\partial Cr}{\partial \{\sigma\}}\}^{t} \left[T\right] \frac{1}{M} \qquad (3.8.)$$

où $$M = H + \{\frac{\partial Cr}{\partial \{\sigma\}}\}^{t} \left[T\right] \{\frac{\partial p}{\partial \{\sigma\}}\} \qquad (3.9)$$

BIBLIOGRAPHIE

1 O.C.ZIENKIEWICZ and Y.K.CHEUNG
The Finite Element Method in structural and continuum Mechanics. Mc Graw Hill,London-New York (1967)

2 O.C.ZIENKIEWICZ
The Finite element Method in Engineering Science. Mc Graw Hill,London (1971)

3 H. TOTTENHAM and C. BREBBIA
Finite Element Techniques in Structural Mechanics. Published by Southampton University Press.Printed by Hobbs the Printers LTD,Millbrook,Southampton(G.B)

4 I. HOLAND and K. BELL
Finite Element Methods in Stress Analysis. Publ.by TAPIR,the Technical University of Norway. Trondheim-NORWAY (1970)

5 G. SANDER et B.F. DE VEUBEKE
Upper and lower bound to structural deformations by dual analysis in finite elements. Air Force Technical Report - OHIO (1967)

6 J. FINE
La Méthode des éléments Finis àppliquée à la Mécanique des Roches.(Publication interne de l'Ecole des Mines 1968)

7 TALOBRE
La Mécanique des Roches.2nd.ed,Dunod Paris (1967)

8 K.G. STAGG and O.C. ZIENKIEWICZ
Rock Mechanics in Engineering Practice. John Wiley & Sons (1968)

9 L. OBERT and W.I. DUVALL
Rock Mechanics and the design of Structures in Rock. John Wiley & Sons (1967)

10 M.A. BIOT
J.Appl. Phys. 9,25 (1954) 1385

11 J.MANDEL
Sur les corps viscoélastiques à comportement linéaire. C.R.Ac.Sc.Paris t 241 p 1910-1912 Déc. 1955
t 242 p 2803-2805 Jun. 1956
J.MANDEL
Cours de Mécanique des Milieux continus. Vol.2 Gauthier-Villars 1966

12 D.R. BLAND
The theory of linear viscoelasticity. Pergamon Press 1960

13 O.C. ZIENKIEWICZ, M. WATSON and I.P. KING
Int.J.Mech.Sci Pergamon Press (1968) Vol.10 p 807-827

14 O.C. ZIENKIEWICZ,S. VALLIAPPAN and I.P. KING
Int.J.Mech.Sci Pergamon Press (1969) Vol.1 p 75-100

15 L.E. BAKER,R.S. SANDHU and W.Y. SHIEH
Application of elasto-plastic analysis in rock Mechanics by finite element method.Proc.11th Sym.Rock Mech. Rock Mechanics theory and practice 237-251 (1970)

16 H. ARMEN, JR, G. ISAKSON and A. PIFKO
Discrete Element Methods for the Plastic Analysis of structures subjected to cyclic loading.
Int. J. for Numerical Methods in Engineering.
Vol. 2, 189-206 (1970)

17 P. MORLIER (1964)
Etude expérimentale de la déformation des roches.
Revue I.F.P. - Vol. XIX - N° 10 et 11.

18 J. MANDEL
Séminaire de Plasticité
Publication scientifique et technique du Ministère de l'Air NT 116 (1962).

19 J.H. ARGYRIS
"Elastoplastic matrix displacement analysis of three dimensional continua"
J. Ray. Acro.Soc. 69, 700-7, (1962)

20 S.F. REYES and D.U. DEERE
"Elastoplastic Analysis of underground openings by the Finite Element Method".Proc. 1st Int. Congr. Rock Mechanics. Vol. II, 477-83, Lisbon (1966)

21 J. SALENCON (1966)
Expansion quasi statique d'une cavité à symétrie sphérique ou cylindrique dans un milieu élasto-plastique.
Annales des Ponts et Chaussées. III.

J. SALENCON (1969)
Contraction quasi statique d'une cavité à symétrie sphérique ou cylindrique dans un milieu élasto-plastique.
Annales des Ponts et Chaussées. IV.

22 NOTE DU LABORATOIRE DE MECANIQUE DES SOLIDES (ECOLE POLYTECHNIQUE)
Estimation du critère de rupture différée du sel de TERSANNE (P.MORLIER) Avril 1969.

23 M. POTTIER
Stockage de gaz naturel en couches de sel.
Revue de l'Industrie Minérale. Vol. 52
Avril 70 N° 4.

24 M. POTTIER et J. LE GUILLETTE
Le stockage souterrain de gaz naturel dans le sel.
Réalisation de Tersanne. (Congrés A.T.G. 1971)

25 LABORATOIRE DE MECANIQUE DES SOLIDES (ECOLE POLYTECHNIQUE)
Calcul de la stabilité des cavités dans le sel (TERSANNE) - Mars 1969 -

26 CENTRE D'ETUDES DE MECANIQUE DES ROCHES
ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DES MINES DE PARIS. Mars 1970.
Etude du comportement mécanique des cavités souterraines de TERSANNE.

27 P.M. STREMSDOERFER
Résolution des Problèmes viscoélastiques, élasto-plastiques et du problème des charges limites par la Méthode des Eléments Finis. Mai-Juin 70.
Ecole des Mines de Paris.

28 P.M. STREMSDOERFER
Résolution par la méthode des Eléments Finis des Problèmes élastoplastiques posés par les cavités souterraines. Tests du programme PLASTAX- Aout 71. Ecole des Mines de Paris.

29 P.M. STREMSDOERFER
Etude de la cavité N° 1 de GAZ DE FRANCE à TERSANNE Nov. 71. Ecole des Mines de Paris.

Académie de Paris

UNIVERSITE de PARIS VI
11, Quai Saint Bernard - Paris 5

SERVICE DE LA SCOLARITE
Bureau des Enseignements du 3e Cycle

tél. 336.25.25 et 325.12.21

PERMIS D'IMPRIMER

DOCTORAT : . . . . DOCTEUR INGENIEUR . . . . . .
THESE DE : . . . . . .

NOM : . Monsieur . STREMSDOEFER . . . . . .
Prénoms : . . Pierre . . . . . .
né le . 7 janvier 1948 à . . LYON 6ème . . . . . Dépt : . Rhone

1ère THESE : . . Résolution par la méthode des éléments finis des problèmes viscoélastiques et élastoplastiques posés par les cavitées souterraines. . . . . .

2e THESE (Propositions faites par l'Université) : Influence de la circulation des eaux sur l'état de contrainte des massifs rocheux. . . . . .

PRESIDENT : M. GERMAIN

EXAMINATEURS : M. SIESTRUNCK
M. MANDEL

Membre Invité: M. TINCELIN

Vu et Approuvé
PARIS, le . 17 juin 1972
Le Président
de l'Université de PARIS VI